Всесибирская олимпиада по математике

9 класс, 2026 год

1. Пусть x, y — действительные числа такие, что

$$x^2 + x \leqslant y.$$

Докажите, что тогда $y^2 + y \geqslant x$.

2. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD > BC$ точка E — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на основание AD, а M — середина диагонали BD. Докажите, что отрезок EM параллелен диагонали AC.

3. В каждой клетке прямоугольной таблицы записано некоторое натуральное число. При этом для каждой клетки число, стоящее в ней, равно общему количеству различных значений чисел в клетках, находящихся в той же строке или том же столбце (включая саму клетку), что и данная. Найдите все таблицы, обладающие этим свойством.

Независимо от размера, это только таблицы, в каждой клетке которых записана единица

4. Найдите все пары простых чисел (p, q) такие, что

$$p^3 + p = q^2 + q.$$

$p = 3$, $q = 5$

5. В группе 20 учащихся, каждый из которых дружит ровно с тремя другими. Некоторые пятеро из них 1 марта купили билет на концерт 1 апреля. Дальше в каждый следующий день, начиная со 2 марта, ровно один из тех, кто ещё не купил билет, но, как минимум двое из его друзей уже купили, тоже покупает билет.

а) Может ли случиться так, что в итоге все учащиеся купят билет?

б) Пусть дополнительно известно, что, если разбить всю группу произвольным образом на две подгруппы, то всегда найдутся двое дружащих между собой учащихся из разных подгрупп. Найдите минимальное n такое, что при любой схеме знакомств в группе, и любом выборе n купивших билет 1 марта, в итоге описанного выше процесса все учащиеся группы купят билет на концерт.

а) нет; б) $n = 18$