

Всесибирская олимпиада по математике

10 класс, 2026 год

1. На доске 8 на 8 произвольным образом отмечены 12 клеток. Докажите, что всегда можно выбрать некоторые 4 горизонтали и некоторые 4 вертикали, содержащие все отмеченные клетки.

2. Сумма некоторого составного натурального числа и его максимального делителя, отличного от 1 и самого числа, равна p^k для некоторого простого числа p и $k \geq 2$. Найти все возможные значения p .

$$\varepsilon = d$$

3. Отрезок разделен 19 точками на 20 частей. Каждый из 20 отрезков разбиения нужно сделать стрелкой так, чтобы стрелок, указывающих налево, было столько же, сколько указывающих направо, и для каждой стрелки количество других стрелок, на которые она указывает, отличалось от аналогичного количества у других стрелок.

Например, вот в такой расстановке 6 стрелок

$$\rightarrow \leftarrow \leftarrow \rightarrow \leftarrow \rightarrow$$

они показывают соответственно на 5, 1, 2, 2, 4, 0 других стрелок.

Найти количество всех расстановок 20 стрелок, удовлетворяющих условию.

$$\text{Количество хороших расстановок равно } C_{20}^5 = 15504$$

4. В остроугольном треугольнике ABC обозначим за I центр вписанной в него окружности, а за P — точку пересечения прямой, зеркально симметричной прямой AB относительно биссектрисы CI и прямой, зеркально симметричной прямой BC относительно биссектрисы AI . Докажите, что прямая PI перпендикулярна стороне AC .

5. Найти все тройки действительных чисел (a, b, c) , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} a(b^2 + c) = c(c + ab), \\ b(c^2 + a) = a(a + bc), \\ c(a^2 + b) = b(b + ca). \end{cases}$$

$$a = b = c$$