

Всесибирская олимпиада по математике

9 класс, 2025 год

1. Ненулевые действительные числа x, y, z таковы, что

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y}.$$

Найти все возможные значения выражения $\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$.

8 '1-

2. На стороне AD квадрата $ABCD$ вовнутрь него построен равносторонний треугольник APD , а на стороне CD вовне квадрата — равносторонний треугольник CQD . Доказать, что точки B, P и Q лежат на одной прямой.

3. Рассмотрим произвольную последовательность из 30 чисел, среди которых 15 единиц и 15 двоек. Число S называется хорошим для этой последовательности, если в ней можно найти несколько подряд идущих чисел, сумма которых равна в точности S . Здесь несколько — это любое количество от 1 до 30 включительно. Найти множество всех натуральных чисел S , хороших для любой последовательности из 15 единиц и 15 двоек.

Хорошими являются все натуральные числа от 1 до 45 включительно, кроме четных чисел от 32 до 44.

4. Найти все натуральные числа n такие, что все цифры в десятичной записи числа $6^n + 1$ одинаковы.

9 '1

5. Вася и Петя по очереди красят клетки доски 11 на 11 , начинает Вася. Первоначально все клетки доски белые, Вася красит любую белую клетку в красный цвет, а Петя — любую белую клетку — в синий. Красить не белые клетки нельзя, пропускать свой ход тоже нельзя, окрашивание продолжается до тех пор, пока все клетки доски не будут окрашены. Если после окончания окрашивания красные клетки образуют связное множество, то выиграл Вася, в противном случае — Петя. Кто победит — Вася или Петя? Множество клеток называется связным, если от любой из этих клеток до любой другой можно добраться за несколько шагов, последовательно переходя от клетки в одну из соседних с ней по стороне или вершине клеток.

клетП