

Всесибирская олимпиада по математике

8 класс, 2024 год

1. Отец и сын измеряют прямоугольный участок земли. Для этого они идут вдоль его границ и считают число шагов. Когда сын шёл по длинной стороне, а отец по короткой, они суммарно насчитали 130 шагов. Когда отец шёл по длинной стороне, а сын по короткой, они суммарно насчитали 120 шагов. Длина шага отца равна 75 см, а сына — 50 см. Найдите стороны участка.

2. У Антона дома обитают кот веса 1 кг, кот веса 2 кг, ..., кот веса 100 кг — всего 100 животных. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он может рассадить всех этих котов по 10 комнатам таким образом, что будут выполняться следующие условия:

- Во всех комнатах есть хотя бы один кот;
- Во всех комнатах находится разное число котов;
- Если в комнате A котов больше чем в комнате B , то суммарный вес котов в комнате A меньше суммарного веса котов в комнате B .

Могут ли слова барона оказаться правдой?

3. Дан равносторонний треугольник ABC . Прямая l пересекает в точках K , L и M соответственно отрезки AB , BC и продолжение стороны AC за точку A . Оказалось, что $AK = BL$, а точка K является серединой отрезка LM . Найдите угол BLM .

4. Профессор Фортран загадал n целых чисел a_1, a_2, \dots, a_n и отдал их в вычислительное бюро. Там эти числа случайным образом перемешали между собой, получив набор b_1, b_2, \dots, b_n , а затем вычислили произведение

$$(a_1 - b_1) \cdot (a_2 - b_2) \cdot \dots \cdot (a_n - b_n),$$

которое отдали обратно. Профессор Фортран заметил, что число, полученное им из бюро, оказалось нечётным. Найдите все n , при которых это возможно, и докажите, что других нет.

5. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может отметить на плоскости 6 точек таким образом, что никакие три из них не будут лежать на одной прямой, а все попарные расстояния между этими точками будут равны целым числам. Могут ли слова барона оказаться правдой?