

# Всесибирская олимпиада по математике

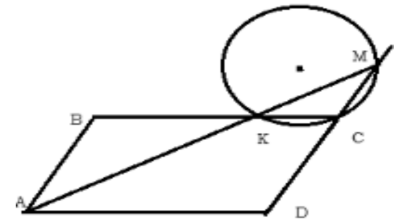
11 класс, 2024 год

1. Какое максимальное количество простых чисел можно записать, используя каждую из десяти цифр от 0 до 9 ровно по одному разу?

2. Найти все множества  $X$ , состоящие из различных натуральных чисел от 1 до 50 такие, что:  
1)  $X$  содержит не все числа от 1 до 50, но не меньше трёх из них, 2)  $X$  содержит числа 1 и 50,  
3) для любых трёх чисел  $x < y < z$  из  $X$  число  $x - y + z$  также принадлежит  $X$ .

3. Пусть длины сторон треугольника являются натуральными числами  $a, b, c$ , и одна из его высот равна сумме двух других. Доказать, что число  $a^2 + b^2 + c^2$  является точным квадратом (натурального числа).

4. Биссектриса угла  $A$  параллелограмма  $ABCD$  пересекает сторону  $BC$  и продолжение стороны  $DC$  за точку  $C$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно (как показано на рисунке). Доказать, что центр описанной окружности треугольника  $KCM$  лежит на описанной окружности треугольника  $BCD$ .



5. У вредного Васи есть клетчатая полоска длины 13 клеток и лента длины  $N \geq 13$  клеток, каждая шириной в одну клетку. Вася хочет разрезать полоску на кусочки произвольной длины из нескольких целых клеток по своему усмотрению, а затем уложить часть из них на ленту в некотором порядке так, чтобы в какой-то момент осталось не менее одного кусочка, ни один из которых уложить уже нельзя. При этом кусочки укладываются строго по клеткам и не могут выходить за пределы ленты, ни одна клетка не должна быть накрыта ими дважды и, если на ленте есть место, куда можно уложить очередной кусочек, Вася должен уложить его в одно из таких мест по своему выбору. При каком минимальном  $N$ , как бы Вася ни старался, ему не удастся задуманное, то есть придётся уложить все кусочки?