

Всесибирская олимпиада по математике

10 класс, 2024 год

1. Найдите все решения в действительных числах системы уравнений:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{y} = \frac{8}{x}, \\ y - \frac{1}{x} = \frac{8}{y}. \end{cases}$$

2. У Васи есть набор из девяти единичных кубиков, у каждого из которых на всех шести гранях записаны в некотором порядке буквы М, А, Т, Е, И, К, по одной на каждой грани. Порядок букв на разных кубиках может отличаться. Кубики можно прикладывать друг к другу гранями, если на них написаны одинаковые буквы. Сможет ли Вася хоть для какого-то набора кубиков сложить из них параллелепипед высоты и ширины 1 и длины 9 так, чтобы на каждой его грани длины 9 были записаны буквы М, А, Т, Е, М, А, Т, И, К в некотором порядке?

3. Пусть $A = \underbrace{44\dots44}_{2n}$ — натуральное число, записанное $2n$ четвёрками и $B = \underbrace{88\dots88}_n$ — натуральное число, записанное n восьмёрками. Доказать, что число $A - B$ — является точным квадратом (натурального числа).

4. Из шести пар братьев нужно составить три команды по 4 человека так, чтобы ни в одной команде не было никаких двух братьев. Сколькими различными способами это можно сделать? Спортсмены из разных пар не являются братьями.

5. В параллелограмме $ABCD$ выбрана точка P такая, что угол ABP вдвое больше угла ADP , а угол DCP вдвое больше угла DAP (см. рисунок). Доказать, что длины отрезков AB , BP и CP равны.

