

Всесибирская олимпиада по математике

9 класс, 2023 год

1. Конечное множество различных действительных чисел X назовём *хорошим*, если каждое число из X можно представить в виде суммы двух других различных чисел из X . Какое минимальное количество чисел может содержать хорошее множество X ?
2. Два простых числа называются *последовательными*, если не существует простого числа, которое больше одного из них и меньше другого. Докажите, что сумму любых двух последовательных простых нечётных чисел всегда можно представить в виде произведения трёх натуральных сомножителей, каждый из которых больше единицы.
3. Два равносторонних треугольника ABC и CDE расположены на плоскости так, что их единственной общей точкой является вершина C . Пусть точки F , G и H являются серединами отрезков BC , CD и AE соответственно. Докажите, что треугольник FGH тоже является равносторонним. Длины сторон треугольников ABC и CDE различны.
4. В какое максимальное число цветов можно окрасить все клетки квадрата 4 на 4 так, чтобы любой квадрат размера 2 на 2 клетки обязательно содержал хотя бы две клетки одинакового цвета?
5. В компании из $n > 1$ человек некоторые её члены знакомы друг с другом, а некоторые — нет. При этом, если X знаком с Y , то и Y знаком с X , сам человек не считается своим знакомым или незнакомым. Найти все n , при которых в компании всегда найдутся два человека A и B , обладающих в этой компании одинаковым количеством знакомых, и таких, что найдётся либо человек B знакомый одновременно с A и B , либо человек Γ , не знакомый одновременно с A и B .