

Всесибирская олимпиада по математике

7 класс, 2023 год

1. Сто эльфов разного возраста встали в круг. Каждый из них, кто оказался старше обоих своих соседей, закрыл левый глаз. Каждый же, кто оказался младше обоих соседей, закрыл правый. В итоге оказалось, что все эльфы стоят с закрытым глазом. Приведите пример, как такое может быть возможно.
2. На некотором острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Как-то раз 99 жителей этого острова встали в круг, и каждый из них сказал: «Все десять человек, следующие за мной по часовой стрелке, являются лжецами». Сколько среди вставших в круг могло быть рыцарей?
3. Профессор Фортран написал программу, которая принимает натуральное число, перемножает все его цифры и это произведение случайным образом либо вычитает из начального числа, либо прибавляет к нему. Так, из числа 239 программа может получить либо $239 - 2 \cdot 3 \cdot 9 = 239 - 54 = 185$, либо $239 + 54 = 293$. Результат после этого выводится на экран, а с полученным числом проделываются те же самые операции. Через некоторое время следующее число тоже появляется на экране, и так далее. Профессор Фортран запустил программу и ввёл число 141. Докажите, что это число никогда снова не будет выведено на экран.
4. Вере Александровне срочно понадобилось вырезать три двадцатиугольника (не обязательно одинаковых) из одного прямоугольного листа бумаги. Она может взять этот лист и разрезать его по прямой на две части. После этого взять одну из полученных частей и разрезать по прямой уже её. Затем взять какой-то из имеющихся кусков, разрезать его, и так далее. Какое наименьшее количество разрезов придётся сделать Вере Александровне, чтобы среди полученных частей оказались нужные ей три двадцатиугольника?
5. Дома у Антона Павловича живёт 198 котов. Все они имеют разный вес, а также разную скорость. Известно, что в любой группе из 100 котов самый толстый из них является одновременно и самым быстрым из них. Докажите, что можно так выбрать группу из 100 котов, что самый худой из них окажется одновременно и самым медленным из них.