

Всесибирская олимпиада по математике

11 класс, 2023 год

1. В треугольнике ABC биссектрисы углов BAC и BCA пересекают стороны BC и AB в точках K и P соответственно. Известно, что длина стороны AC равна сумме длин отрезков AP и CK . Найдите величину угла ABC .

2. Тройка действительных чисел A, B, C такова, что

$$\sin A + \sin B + \sin C = 0 \quad \text{и} \quad \cos A + \cos B + \cos C = 0.$$

Найти значение выражения $\cos(A - B) + \cos(B - C) + \cos(C - A)$.

3. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} x^5 = y^3 + 2z, \\ y^5 = z^3 + 2x, \\ z^5 = x^3 + 2y. \end{cases}$$

4. В возрастающей арифметической прогрессии из n натуральных чисел каждый член, кроме последнего, делится на свой номер в прогрессии, а последний — нет. Докажите, что n является степенью некоторого простого числа.

5. На одной стороне каждой из 100 карточек написали одно из натуральных чисел от 1 до 100 включительно (каждое число записано ровно на одной карточке), после чего перевернули их обратными сторонами вверх и разложили в произвольном порядке на столе. За один вопрос Вася может указать на две любые карточки, после чего получает от ведущего ответ, являются ли записанные на них числа соседними (отличающимися на 1). За какое минимальное число вопросов Вася может гарантированно назвать хотя бы одну пару карточек, на которых написаны соседние числа?