

Всесибирская олимпиада по математике

11 класс, 2022 год

1. Десятичная запись натурального числа N содержит каждую цифру от 0 до 9 ровно один раз. Обозначим через A сумму пяти двузначных чисел, составленных из первой и второй, третьей и четвёртой, \dots , девятой и десятой цифр N , а через B — сумму четырёх двузначных чисел, составленных из второй и третьей, четвёртой и пятой, \dots , восьмой и девятой цифр N . Оказалось, что A равно B . Может ли N начинаться с чётной цифры?

2. Найти все решения в действительных числах системы уравнений

$$\begin{cases} x(1 + yz) = 9, \\ y(1 + xz) = 12, \\ z(1 + xy) = 10. \end{cases}$$

3. Перестановка чисел $1, 2, 3, \dots, n$ в некотором порядке называется *забавной*, если в ней каждое число, начиная со второго слева, либо больше всех чисел, стоящих левее него, либо меньше всех чисел, стоящих левее него. Например, перестановка $3, 2, 1, 4, 5, 6$ является забавной, а перестановка $3, 1, 2, 4, 5, 6$ — нет. Найти количество всех различных забавных перестановок чисел $1, 2, 3, \dots, n$.

4. Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC , точка M — середина стороны AC . На стороне AB выбрана точка K такая, что прямая BH делит отрезок CK пополам. Доказать, что отрезки MH и CK перпендикулярны.

5. Доказать, что для любых действительных чисел x, y, z из интервала $[0, 1]$ выполнено неравенство $\frac{x+y}{2+z} + \frac{x+z}{2+y} + \frac{y+z}{2+x} \leq 2$.