

Всесибирская олимпиада по математике**10 класс, 2021 год**

1. Докажите, что для любого $x \neq 0$ выполнено неравенство:

$$x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} > 0.$$

2. Разрезать правильный пятиугольник на несколько треугольников так, чтобы каждый из них граничил ровно с тремя другими. Граничить — значит иметь общий отрезок границы.

3. Найти все натуральные n , для которых на клетчатой доске размера n на n клеток можно отметить n клеток, стоящих в разных горизонталях и разных вертикалях, которые можно последовательно обойти ходом шахматного коня, начиная с некоторой, не вставая на одну клетку дважды, и вернуться на исходную клетку. Конь при этом может вставать только на отмеченные клетки.

4. Пусть $m < n$ — натуральные числа. Доказать, что среди произвольных последовательных n натуральных чисел всегда найдутся два, произведение которых делится на mn .

5. На отрезке AB отмечена произвольная точка M , отличная от A и B . С одной стороны от прямой AB выбрана точка C , а с другой — точки D и E такие, что треугольники ABC , AMD и MBE являются равносторонними. Обозначим через P , Q , R точки пересечения медиан треугольников ABC , AMD и MBE соответственно. Доказать, что: а) треугольник PQR — равносторонний, б) точка пересечения медиан треугольника PQR лежит на отрезке AB .