Всесибирская олимпиада по математике

10 класс, 2019 год

1. Прямые ℓ и m пересекают ось OX в различных точках, симметричных друг другу относительно начала координат, и параболу $y = x^2$ в точках (a, a^2), (b, b^2) и (c, c^2), (d, d^2) соответственно. Доказать, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$.

2. Множество A содержит 15 различных натуральных чисел, не превосходящих 100, одно из которых равно 84, и обладает следующим свойством: модуль разности любых двух различных чисел из A снова содержится в A. Доказать, что A обязательно содержит число 42.

3. Пусть в каждой клетке квадратной таблицы n на n, где n — нечётно, стоит 1 или -1. Обозначим произведения всех чисел в первой, второй, …, n-ой строках таблицы через a_1, a_2, …, a_n, а в первом, втором, …, n-ом столбцах — через b_1, b_2, …, b_n. Доказать, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + b_1 + b_2 + \ldots + b_n \neq 0.$$

4. Докажите, что для любых положительных чисел a и b и любого натурального n выполняется неравенство

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}.$$

5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность и длины сторон BC и DC равны, а длина стороны AB равна длине диагонали AC. Пусть точка P — середина дуги CD, не содержащей точку A, и Q — точка пересечения диагоналей AC и BD. Доказать, что прямые PQ и AB перпендикулярны.