

## Всесибирская олимпиада по математике

11 класс, 2018 год

1. Пусть  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$  и  $ac + bd = 0$  для некоторых действительных чисел  $a, b, c, d$ . Найти все возможные значения выражения  $ab + cd$ .
2. Решить уравнение:  $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 2$ .
3. Может ли сумма объёма, длин всех рёбер и площадей всех граней некоторого прямоугольного параллелепипеда, длины рёбер которого являются целыми числами, равняться 866?
4. В множестве  $X$  из 17 элементов выделено семейство из  $N$  различных непустых подмножеств таких, что каждый элемент множества  $X$  содержится ровно в двух подмножествах из этого семейства. Каково максимальное значение  $N$ ? Найдите число всех возможных различных типов таких семейств для максимального  $N$ . Два семейства подмножеств имеют различные типы, если не получаются друг из друга перестановкой элементов  $X$ .
5. Пусть  $A$  и  $B$  — две различных фиксированных точки окружности,  $C$  — произвольная точка этой окружности, отличная от  $A$  и  $B$ , и  $MP$  — перпендикуляр, опущенный из середины  $M$  хорды  $BC$  к хорде  $AC$ . Доказать, что прямые  $PM$  при любом выборе  $C$  проходят через некоторую общую точку  $T$ .