

Всесибирская олимпиада по математике**11 класс, 2017 год**

1. Могут ли при каком-то значении x оба числа $\cos x + \sqrt{2}$ и $\cos 2x + \sqrt{2}$ быть рациональными?
2. Решить в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8. \end{cases}$$

3. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрали точку P , отличную от O — центра описанной окружности треугольника ABC , и такую, что угол PAC равен углу PBA и угол PAB равен углу PCA . Доказать, что угол APC — прямой.
4. Доказать, что рёбра произвольного тетраэдра (треугольной пирамиды) можно разбить некоторым образом на три пары так, что существует треугольник, длины сторон которого равны суммам длин рёбер тетраэдра в этих парах.
5. Найти все натуральные n , для которых все натуральные числа от 1 до n включительно можно записать в ряд в таком порядке, что сумма первых слева k чисел будет либо делить сумму всех $n - k$ оставшихся, либо делиться на неё при любом k от 1 до $n - 1$.