

Всесибирская олимпиада по математике

7 класс, 2016 год

1. Доказать, что если $a + \frac{1}{a}$ — целое число, то и $a^2 + \frac{1}{a^2}$ — целое число.
2. Можно ли покрасить плоскость в 2016 цветов таким образом, что среди вершин любого треугольника найдётся хотя бы два цвета?
3. Дан треугольник ABC , сторона AB разбита на 4 равных отрезка $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B$, а сторона AC на 5 равных отрезков $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше суммы площадей треугольников $C_1B_1C_2$, $C_2B_2C_3$, $C_3B_3C_4$, C_4BC ?
4. Маша и Миша вышли навстречу друг другу одновременно каждый из своего дома и встретились в одном километре от дома Маши. В другой раз они снова вышли каждый из своего дома навстречу друг другу одновременно, но Маша шла в 2 раза быстрее, и Миша в 2 раза медленнее, чем в прошлый раз. В этот раз они встретились в 1 километре от дома Миши. На каком расстоянии находятся дома Маши и Миши друг от друга?
5. Дано число 1836549, можно брать две соседние ненулевые цифры и менять их местами, после чего вычесть из каждой из них по 1. Какое наименьшее число может получиться после этих операций?