

Всесибирская олимпиада по математике

11 класс, 2016 год

1. Найти величину выражения $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} + \frac{2}{1+xy}$, если известно, что $x \neq y$ и сумма первых двух слагаемых выражения равна третьему.
2. По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один см направлен вдоль оси OX , каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после сотого прыжка оказаться в начале координат?
3. Найти все натуральные числа, которые можно представить одновременно как сумму нескольких (больше одного) натуральных чисел и как произведение тех же натуральных чисел.
4. В треугольнике ABC отрезки AK , BL и CM — высоты, H — их точка пересечения, S — точка пересечения MK и BL , P — середина отрезка AH , T — точка пересечения прямой LP и стороны AB . Доказать, что прямая ST перпендикулярна стороне BC .
5. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — произвольные действительные числа. Доказать, что найдётся натуральное k , $1 \leq k \leq n$, такое, что все k средних арифметических $\frac{a_1+\dots+a_k}{k}, \frac{a_2+\dots+a_k}{k-1}, \dots, \frac{a_{k-1}+a_k}{2}, \frac{a_k}{1}$ не превосходят $\frac{a_1+\dots+a_n}{n}$.