

Всесибирская олимпиада по математике**10 класс, 2016 год**

1. Найти все натуральные числа n , такие, что $\frac{1}{n} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq}$ для некоторых простых p и q .
2. По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один сантиметр направлен вдоль оси OX , каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после 31-ого прыжка оказаться в начале координат?
3. Две окружности пересекаются в точках P и M . На первой окружности выбрана произвольная точка A , отличная от P и M и лежащая внутри второй окружности, лучи PA и MA вторично пересекают вторую окружность в точках B и C соответственно. Доказать, что прямая, проходящая через A и центр первой окружности, перпендикулярна BC .
4. Найти все функции $f(x)$, определённые на всей числовой прямой, удовлетворяющие уравнению $f(y - f(x)) = 1 - x - y$ для произвольных x и y .
5. Найдутся ли пять последовательных натуральных чисел таких, что если обозначить их буквами a, b, c, d, e в некотором порядке, то выполнится равенство

$$(a + b)(b + c)(c + d)(d + e)(e + a) = (a + c)(c + e)(e + b)(b + d)(d + a)?$$