

# Всесибирская олимпиада по математике

10 класс, 2015 год

1. Из пунктов  $A$  и  $B$  не одновременно выехали друг навстречу другу автомобилист и велосипедист. Встретившись в точке  $C$ , они тотчас развернулись и поехали обратно с теми же скоростями. Доехав до своих пунктов  $A$  и  $B$ , они снова развернулись, поехали и встретились второй раз в точке  $D$ . Здесь они вновь развернулись и так далее. В какой точке отрезка  $AB$  произойдёт их 2015-ая встреча?

2. Найти все значения параметров  $a, b, c$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ bx + cy = a, \\ cx + ay = b, \end{cases}$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение (когда  $x, y < 0$ ).

3. В равностороннем треугольнике  $ABC$  на сторонах  $AB$  и  $AC$  взяты точки  $P$  и  $Q$  соответственно такие, что  $AP : PB = CQ : QA = 2$ . Пусть  $O$  — точка пересечения отрезков  $CP$  и  $BQ$ , доказать, что угол  $AOC$  — прямой.

4. 25 различных натуральных чисел, не превосходящих 1000 таковы, что произведение любых двух из них является квадратом некоторого натурального числа. Доказать, что и сами числа являются квадратами натуральных чисел.

5. Окружность разбита на 21 равную дугу двадцатью одной точкой, являющимися вершинами правильного 21-угольника, каждая вершина окрашена в один из трёх цветов, все три цвета присутствуют. Доказать, что всегда можно выбрать по одной вершине каждого цвета так, что образованный этими вершинами треугольник содержит центр окружности.