

Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, школьный этап, 2025/26 год

1. Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$ такая, что

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 &= 9, \\ a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 &= 108.\end{aligned}$$

Найдите a_1 и разность этой арифметической прогрессии.

2. У Вити есть четыре карточки, на которых написаны числа 3, 5, 7, 8. Он случайным образом составляет из них число вида

$$\overline{ab^{cd}}.$$

С какой вероятностью это число делится на 3? Выражение \overline{ab} обозначает двухзначное число, состоящее из цифр a и b .

3. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ отметили точку E — пересечение лучей AD и BC и точку F — пересечение лучей AB и DC . Оказалось, что $CD = DE$, $\angle AEB = 51^\circ$ и угловые меры дуг BC и AD находятся в соотношении 2 : 5.

1. Найдите угол AFD . Ответ выразите в градусах.

2. Найдите величину меньшей дуги BC . Ответ выразите в градусах.

4. Найдите количество пар различных натуральных чисел a, b таких, что $1 \leq a < b \leq 100$ и

$$\lfloor \sqrt{a} \rfloor + \lfloor \sqrt{b} \rfloor = \lfloor \sqrt{a} \rfloor + \lfloor \sqrt{b} \rfloor.$$

Напомним, что $\lfloor x \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, меньшее или равное x , а $\lceil x \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное x .

5. Дана колода из 300 карт, на каждой из которых записано натуральное число от 1 до 300 (каждое число встречается по одному разу). Петя раскладывает пасьянс. Для этого Петя выкладывает карты в прямоугольник 3×100 (3 строки, 100 столбцов) так, что числа на картах в каждом столбце возрастают сверху вниз, а также любое число в нижней строке больше любого числа в верхней строке. **Удачностью** пасьянса называется сумма всех чисел на карточках в верхней и нижней строках. Какой максимальной удачности пасьянс может выложить Петя?

6. Толя задумал два квадратных трёхчлена. Оказалось, что первый трёхчлен имеет корни 1 и 2, а один из двух корней второго трёхчлена равен -5 . Также известно, что графики трёхчленов пересекаются в двух точках: одна из них имеет координаты $(3, 4)$, а вторая — лежит на оси ординат.

1. Найдите ординату второй точки пересечения графиков.

2. Найдите произведение корней второго трёхчлена.

7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ площадь треугольника BCC_1 равна 1, площадь треугольника ACC_1 — 34.

1. Пусть S — площадь треугольника CDC_1 . Найдите S^2 .
2. Оказалось, что площадь треугольника ABC_1 равна 46. Чему равна площадь треугольника ABC ?

8. Каждый день в 8:00 Петя выписывает на доску букву «а», «b» или «с». Затем каждую минуту он делает одно из следующих действий:

- Приписывает сразу после буквы «а» букву «с»;
- Приписывает сразу перед буквой «b» букву «с»;
- Приписывает сразу после буквы «с» ещё одну букву «с»;
- Стирает букву «с» и вписывает на том же месте комбинацию «ba».

Через 9 минут, получив последовательность из 10 букв, Петя останавливается. Сколько различных последовательностей из 10 букв, в которых ровно 2 буквы «с», может получить Петя?