Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, региональный этап, 2025/26 год

Первый день

1. Числа a, b и c таковы, что

$$a^2 + b^2 < (a - b)^2 \quad \text{и} \quad b^2 + c^2 < (b - c)^2.$$

Докажите, что $a^4 + c^4 < (a + c)^4$.

2. В клетчатом квадрате 11×11 отметили все 144 вершины клеток. Затем отмеченные точки раскрасили в пять цветов. При каком наибольшем d могло оказаться, что расстояние между любыми двумя одноцветными отмеченными точками не меньше d?

$\boxed{d = \sqrt{5}}$

3. Петя и Вася играют в игру. В начале игры на столе лежат 1000 куч, состоящих из 1, 2, 3, ..., 1000 спичек соответственно. Ребята ходят по очереди, начинает Петя. Каждый из мальчиков своим ходом может взять любое ненулевое количество спичек из кучи с наибольшим количеством спичек (ровно из одной из таких куч, если их несколько). Выигрывает тот, кто заберёт последнюю спичку. Кто из мальчиков может играть так, чтобы гарантированно выиграть?

$\boxed{\text{Петя}}$

4. Существует ли такое натуральное число n, что для каких-то трёх его делителей a, b, c, больших 1, произведение $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$ делится на n^2?

$\boxed{\text{Нет}}$

5. Выпуклые четырёхугольники $ABCD$ и $KLMN$ расположены так, что прямые KL, LM, MN и NK являются биссектрисами внешних углов A, B, C и D четырёхугольника $ABCD$ соответственно. При этом $ABCD$ не является параллелограммом. Диагонали четырёхугольника $KLMN$ пересекаются в точке P. Докажите, что если $\angle BAD = \angle BCD < 90^\circ$, то $PA = PC$.

Второй день

6. Тренер дал начинающим шахматистам задание: каждый должен подойти к шахматной доске 8×8, поставить шахматного короля на одну из угловых клеток и сделать им 21 ход так, чтобы король побывал в каких-то двух других угловых клетках и вернулся в исходную клетку. После этого короля убирают, и к доске подходит следующий ребёнок. Четыре ребёнка по очереди выполнили задание. Обязательно ли после этого найдутся такие две клетки A и B, что хотя бы два ребёнка сделали ход королём с клетки A на клетку B?

$\boxed{\text{Нет}}$

7. Дано нечётное простое число p. Найдите все пары натуральных чисел a и b таких, что $\dfrac{a}{p} + \dfrac{p}{b} = 2$.

$\boxed{a = b = p \text{ и } a = 2p - 1,\ b = p^2}$

8. Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Прямая AO пересекает отрезок BC в точке D. Точка E выбрана на отрезке BC так, что D — середина отрезка CE. Основание T перпендикуляра, опущенного из E на CO, лежит в треугольнике ABD. Прямая BT пересекает окружность, описанную около треугольника ABD, в точке K. Докажите, что прямые AK и CO параллельны.

9. Числа a, b и c больше единицы и удовлетворяют равенству

$$\left(a - \frac{1}{b}\right)\left(b - \frac{1}{c}\right)\left(c - \frac{1}{a}\right) = 1.$$

Докажите, что

$$\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c - \frac{1}{c}\right)^2 \geqslant \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}.$$

10. В большой компании у каждого человека ровно 100 знакомых в этой же компании (если A знаком с B, то и B знаком с A). Оказалось, что у любого человека среди его 100 знакомых есть хотя бы одна пара незнакомых друг с другом людей. При каком наибольшем k можно утверждать, что в компании найдётся такой человек, что среди его 100 знакомых найдутся хотя бы k различных пар людей, в каждой из которых люди не знакомы друг с другом? (Один человек может входить в несколько таких пар.)

$\boxed{k = 50}$