

Второй день

6. Существуют ли такие составные натуральные числа $m > n > 1$, что у чисел m , n , $m + n$ и $m - n$ наибольший делитель, отличный от самого числа, одинаковый?

Да

7. По кругу расставили 2026 попарно различных иррациональных чисел и для каждой пары стоящих рядом чисел a и b вычислили значение выражения $\frac{ab}{a-b}$. Может ли ровно одно из 2026 полученных значений быть иррациональным?

Нет

8. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O . Биссектрисы его углов A и C пересекаются в точке E , а биссектрисы углов B и D — в точке F , причём точки O , E и F лежат внутри четырёхугольника. Описанные окружности треугольников ACE и BDF пересекаются в точках P и Q . Докажите, что точки O , P и Q лежат на одной прямой.

9. Даны натуральные числа $n > k \geq 2$. В клетчатом квадрате $n \times n$ закрашено несколько клеток. В каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы одна закрашенная клетка, причём в каждом ряду (строке или столбце) закрашенные клетки идут подряд. Известно, что нет целиком закрашенного квадрата $k \times k$. Какое наибольшее число клеток может быть закрашено?

$\frac{1}{2}(n-k)(n+k)$

10. Пусть a , b , c — положительные числа, причём $a + b + c = 3$. Докажите, что

$$\frac{a}{b^4 + 2b} + \frac{b}{c^4 + 2c} + \frac{c}{a^4 + 2a} \geq 1.$$