Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, региональный этап, 2025/26 год

Первый день

1. Даны 6 последовательных натуральных чисел. Докажите, что их можно обозначить (в некотором порядке) буквами a, b, c, d, e, f так, чтобы число $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{d}{e+f}$ было натуральным.

2. У Даши и Саши есть по доске 9×9. Даша укладывает на свою доску 40 не перекрывающихся плиток 1×2 (так, что плитки занимают 80 клеток, а одна клетка остается не покрытой). Пусть у неё есть D способов сделать это. Саша красит на своей доске 41 единичных отрезков-границ между соседними клетками, так, чтобы для каждой клетки доски хотя бы одна её сторона была покрашена. Пусть у Саши S способов сделать это. Докажите, что $S \leqslant 2D$.

3. Периметр выпуклого пятиугольника $ABCDE$ равен 2. Пусть O_a, O_b, O_c, O_d, O_e — центры описанных окружностей треугольников EAB, ABC, BCD, CDE, DEA соответственно. Пусть M_a, M_b, M_c, M_d, M_e — середины отрезков AO_a, BO_b, CO_c, DO_d, EO_e соответственно. Докажите, что

$$M_aM_b + M_bM_c + M_cM_d + M_dM_e + M_eM_a \geqslant 1.$$

4. Существует ли такое натуральное число n, что для каких-то трёх его делителей a, b, c, больших 1, произведение $(a-1)(b-1)(c-1)$ делится на n^2?

Нет

5. В Средиземье 1000 графств, в одном из которых находится волшебное Кольцо. Раз в день Маг может выбрать любое подмножество графств, и получить от волшебного Камня ответ, есть ли Кольцо в одном из этих графств. Камень может ошибиться, но никогда не ошибается два дня подряд. Маг может совершать данное действие некоторое количество дней, после чего он должен отправить гонцов в некоторые k графств, в одном из которых наверняка находится Кольцо. При каком наименьшем k Маг может это сделать?

2

Второй день

6. На окружности отмечено 16 точек, которые делят окружность на 16 равных дуг. Петя расставил в этих точках (в некотором порядке) 16 последовательных натуральных чисел. Далее для каждой пары диаметрально противоположных точек Петя вычислил сумму чисел в этих точках. Могло ли оказаться, что полученные 8 сумм представляют собой 8 последовательных натуральных чисел?

$\boxed{\text{Нет}}$

7. На координатной плоскости проведена прямая $ax+by+c=0$, где a, b, c — некоторые положительные числа. Известно, что эта прямая касается окружности $x^2+y^2=1$. Докажите, что если взять три отрезка с длинами a, b, c, то из них можно сложить прямоугольный треугольник.

8. В конференции участвуют 2026 математиков, у каждого из которых есть некоторое количество друзей (возможно, ни одного) среди остальных. Дружба взаимна. Известно, что выполняется условие: если двое математиков дружат, то количества друзей у них отличаются ровно на 1. Найдите наибольшее возможное количество пар друзей.

$\boxed{1025156}$

9. Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle BAC = 60°$. Точки D и E симметричны его центру описанной окружности O относительно сторон AB и AC соответственно. Прямая DE пересекает отрезки AB и AC в точках F и G соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников BDF и CEG касаются.

10. Дан многочлен f третьей степени с целыми коэффициентами, причём старший коэффициент f равен 1 или -1. Известно, что f имеет три различных корня, каждый из которых равен квадрату натурального числа. Докажите, что в последовательности значений $|f(1)|$, $|f(2)|$, $|f(3)|$ и т. д. встретится квадрат натурального числа.