

# Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, муниципальный этап, 2025/26 год

1. Найдите натуральное  $x$  такое, что

$$x^x = 2^{2^{11}}.$$

2. В прямоугольнике  $ABCD$  со сторонами  $AB = 10$ ,  $BC = 12$  отметили точку  $M$  — середину стороны  $CD$ . На отрезке  $BM$  отметили точку  $P$  так, что  $BC = BP$ . Найдите площадь четырехугольника  $ABPD$ .

3. Петя случайно выбирает натуральное число  $d$  от 1 до 5; вероятность выбрать каждое равна  $\frac{1}{5}$ . Затем Петя случайно выбирает натуральное число  $a$  от 1 до 1300; вероятность выбрать каждое равна  $\frac{1}{1300}$ . Найдите вероятность того, что один из членов арифметической прогрессии с первым членом  $a$  и разностью  $d$  будет равен 1825.

4. У Пети есть натуральное число  $N$ . Он рассматривает все пары цифр числа  $N$ , одна из которых чётная, а другая нечётная, и записывает на доску произведение цифр в каждой паре. Например, если бы у него было число 2338, то на доске были бы записаны числа 6, 6, 24 и 24. Оказалось, что сумма чисел на доске равна 26. Какое минимальное  $N$  могло быть у Пети?

5. Рассмотрим правильную десятиугольную призму  $A_1A_2 \dots A_{10}B_1B_2 \dots B_{10}$ . Найдите количество прямых, проходящих через две вершины этой призмы и скрещивающихся с диагональю  $A_1B_6$ .

6. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на множестве действительных значений и принимают действительные значения. Также известно, что  $f(x)$  и  $g(x)$  взаимно обратны, при этом значения функций  $f(x)$  и  $y = \frac{x}{2}$  во всех точках отличаются меньше чем на 5. Уравнение  $g(x) = 25 - x^2$  имеет целый корень. Найдите все возможные значения этого корня. Напомним, что функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , определённые на множестве действительных значений и принимающие действительные значения, являются взаимно обратными, если  $f(g(x)) = g(f(x)) = x$  для всех действительных  $x$ .

7. В остроугольном треугольнике провели высоту  $BH$ . На дуге  $AC$  описанной окружности треугольника  $ABC$ , не содержащей точку  $B$ , отметили точку  $X$  такую, что  $BX = BC$ . Прямая, проходящая через  $X$  параллельно  $AB$ , пересекает отрезки  $AC$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$ . Найдите длину отрезка  $PQ$ , если  $AB = 7$ ,  $AC = 10$ ,  $AH = 3$ .

8. Петя и Вася играют в следующую игру. На доске  $5 \times 5$  в каждой клетке лежит по  $n$  конфет. Петя и Вася по очереди, начиная с Пети, выбирают непустую клетку и съедают из неё несколько конфет. При этом из угловых клеток разрешается съесть не более двух конфет, из клеток, имеющих 3 соседа по стороне, — не более 3 конфет, из всех остальных — не более 5 конфет. Игрок, после чьего хода появляется пустая строка или пустой столбец, побеждает. Для скольких  $n$  в диапазоне от 1 до 1000 у Пети есть выигрышная стратегия?