

Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, муниципальный этап, 2025/26 год

1. Арифметическая прогрессия, состоящая из целых чисел, содержит $2n$ членов. Известно, что разность суммы последних n и суммы первых n членов равна 450. Укажите все возможные значения n , если известно, что $n > 1$.

2. На множестве целых чисел ввели две операции:

$$a \star b = b^2 - a^2, \quad a \diamond b = a - b + 3.$$

Найдите значение выражения

$$\left(\dots \left(\left(\left((1 \star 2) \diamond 3 \right) \star 4 \right) \diamond 5 \right) \star \dots \right) \star 2024.$$

3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту AD . Вписанные окружности треугольников ABD и ACD касаются AD в точках P и Q соответственно и касаются BC в точках X и Y соответственно. Пусть прямые PX и QY пересекаются в точке Z . Найдите площадь треугольника XYZ , если известно, что $BC = 22$, $AD = 12$, а периметр треугольника ABC равен 56.

4. Среди учеников 10 класса в одной школе 93% учеников знает Python, 81% учеников знает C++ и 62% учеников знает Java. Других языков программирования никто не знает. Пусть a — процент учеников, знающих ровно два языка программирования.

а) Чему равно наибольшее возможное значение a ?

б) Чему равно наименьшее возможное значение a ?

5. Во вписанном четырехугольнике $ABCD$ на стороне AD отметили такую точку X , что $AX = CD$ и $\angle BXD = \angle CDA$. Найдите BX , если известно, что $AB = 8$, $BC = 10$, $CD = 3$.

6. При каком наименьшем N во все клетки таблицы 4×10 можно расставить некоторые из чисел от 1 до n , каждое не более одного раза, так, чтобы любые два соседние по горизонтали или вертикали числа отличались хотя бы в 2 раза?

7. У Маши есть книги с номерами от 1 до 2025 и очень длинная книжная полка. Сначала Маша поставила книгу номер 1 на полку. Далее Маша каждый раз берёт книгу со следующим номером n и ставит её непосредственно справа от книги с номером m , где m — наибольший собственный делитель n . Так продолжается, пока Маша не поставит все книги.

а) Чему равен номер книги справа от книги с номером 33?

б) Чему равен номер книги слева от книги с номером 33?

Напомним, что собственным делителем числа называется всякий его делитель, отличный от самого числа.

8. Вычислите сумму

$$\frac{x_1^3}{1 - 3x_1 + 3x_2^2} + \frac{x_2^3}{1 - 3x_2 + 3x_2^2} + \dots + \frac{x_{101}^3}{1 - 3x_{101} + 3x_{101}^2},$$

если для всех i от 1 до 101 выполнено, что $x_i = \frac{i}{101}$.