

Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, региональный этап, 2023/24 год

Первый день

1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1 , 1×2 , 1×3 , \dots , 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

□ Не может

2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k . Докажите, что продолжения боковых сторон всех таких трапеций проходят через одну точку.

3. По кругу стоят 100 белых точек. Аня и Боря красят по очереди по одной еще не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Аня. Аня хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Боря — чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Аня может гарантировать себе независимо от игры Бори?

□ 0

4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500.

5. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны и пересекаются в точке O . Центры вписанных окружностей треугольников ABC , BCD , CDA , DAB являются вершинами выпуклого четырехугольника, периметр которого равен P . Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников AOB , BOC , COD , DOA не превосходит $\frac{P}{2}$.

Второй день

6. Сергей утверждает, что нашел различные вещественные числа x, y, z такие, что

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{y^2 + y + 1} + \frac{1}{z^2 + z + 1} = 4.$$

Могут ли слова Сергея быть правдой?

л.л.л.м.э.н

7. Петя утверждает, что он написал 10 подряд идущих натуральных чисел, и оказалось, что среди всех цифр, используемых в этих числах, каждая цифра (от 0 до 9) встречается одно и то же количество раз. Могли ли слова Пети оказаться правдой?

н.л.л.л.м

8. Дан четырехугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C = 90^\circ$. Известно, что его вершины A и D вместе с серединами сторон AB и BC лежат на одной окружности. Докажите, что вершины B и C вместе с серединами сторон AD и DC тоже лежат на одной окружности.

9. Найдите все тройки (не обязательно различных) натуральных чисел a, b, c такие, что каждое из чисел

$$a + bc, \quad b + ca, \quad c + ab$$

является простым делителем числа $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$.

(1'1'1)

10. Каждый из 2024 людей является рыцарем или лжецом. Некоторые из них дружат друг с другом, причем дружба взаимна. Каждого из них спросили про количество друзей, и все ответы оказались различными целыми числами от 0 до 2023. Известно, что

- все рыцари отвечали на вопрос верно,
- все лжецы изменяли истинный ответ ровно на 1.

Какое наименьшее число лжецов могло быть среди этих людей?

2101