Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, заключительный этап, 2021/22 год

Первый день

1. Число x таково, что $\sin x + \operatorname{tg} x$ и $\cos x + \operatorname{ctg} x$ — рациональные числа. Докажите, что $\sin 2x$ является корнем квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т. д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых.

3. В каждой строке таблицы $100 \times n$ в некотором порядке стоят числа от 1 до 100, числа в строке не повторяются (в таблице n строк и 100 столбцов). Разрешается поменять местами в строке два числа, отличающиеся на 1, если они не стоят рядом. Оказалось, что с помощью таких операций нельзя получить двух одинаковых строк. При каком наибольшем n это возможно?

4. Окружность ω описана около треугольника ABC, в котором $AB < AC$. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Из середины M стороны BC на прямую AI опущен перпендикуляр MH. Прямые MH, BI и AB ограничивают треугольник T_b, а прямые MH, CI и AC ограничивают треугольник T_c. Описанные окружности треугольников T_b и T_c повторно пересекают окружность ω в точках B' и C' соответственно. Докажите, что точка H лежит на прямой $B'C'$.

Второй день

5. Изначально на доске написано 10 единиц. Гриша и Глеб играют в игру, делая ходы по очереди. Своим ходом Гриша возводит некоторые 5 чисел на доске в квадрат. Глеб своим ходом выбирает несколько (возможно, ни одного) чисел на доске и увеличивает каждое из них на 1. Если в течение 10 000 ходов на доске появится число, делящееся на 2023, то побеждает Глеб, иначе побеждает Гриша. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию, если первым ходит Гриша?

6. Плоскость α пересекает рёбра AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках X, Y, Z и T соответственно. Оказалось, что точки Y и T лежат на окружности ω, построенной на отрезке XZ как на диаметре. Точка P отмечена в плоскости α так, что прямые PY и PT касаются окружности ω. Докажите, что середины рёбер AB, BC, CD, DA и точка P лежат в одной плоскости.

7. Назовём многочлен $P(x)$ *бицелозначным*, если числа $P(k)$ и $P'(k)$ целые при любом целом k. Пусть $P(x)$ — бицелозначный многочлен степени d, и пусть N_d — произведение всех составных чисел, не превосходящих d (произведение пустого множества сомножителей считаем равным 1). Докажите, что старший коэффициент многочлена $N_d \cdot P(x)$ — целый.

8. В стране N городов. В ней действует $N(N-1)$ дорог с односторонним движением: по одной дороге из X в Y для каждой упорядоченной пары городов $X \neq Y$. У каждой дороги есть цена её обслуживания. Для данного $k = 1, \ldots, N$ рассмотрим все способы выделить k городов и $N - k$ дорог так, чтобы из каждого города можно было попасть в какой-то выделенный город, пользуясь только выделенными дорогами. Такую систему городов и дорог с наименьшей суммарной стоимостью обслуживания назовём *k-оптимальной*. Докажите, что города можно пронумеровать от 1 до N так, что при каждом $k = 1, 2, \ldots, N$ существует k-оптимальная система дорог с выделенными городами $1, 2, \ldots, k$.