

Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, муниципальный этап, 2021/22 год

1. Найдите любое натуральное x такое, что значение выражения $2^x + 2^8 + 2^{11}$ является квадратом натурального числа.

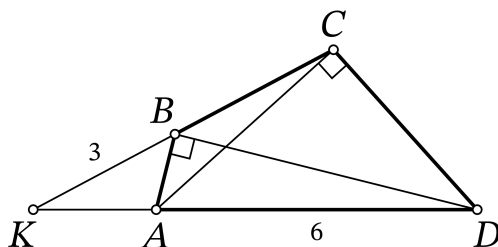
2. По кругу лежат 36 шариков, каждый из которых либо красный, либо синий (шарики каждого из этих цветов присутствуют). Известно, что:

- для любого красного шарика найдётся ровно один красный шарик такой, что между ними лежит ровно один шарик;
- для любого красного шарика найдётся ровно один синий шарик такой, что между ними лежат ровно три шарика.

1. Пусть нет двух рядом лежащих красных шариков. Сколько всего красных шариков может лежать по кругу? Укажите все возможные варианты.

2. Пусть есть два рядом лежащих красных шарика. Сколько всего красных шариков может лежать по кругу? Укажите все возможные варианты.

3. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$, $\angle CAD = 42^\circ$. Лучи CB и DA пересекаются в точке K . Известно, что $BK = 3$, $AD = 6$.



1. Сколько градусов составляет угол BKA ?

2. Сколько градусов составляет угол BAC ?

4. Дана клетчатая прямоугольная таблица. Известно, что существует:

- ровно 940 способов вырезать из неё по линиям сетки прямоугольник 1×2 ;
- ровно 894 способа вырезать из неё по линиям сетки прямоугольник 1×3 .

Сколько существует способов вырезать из неё по линиям сетки прямоугольник 1×5 ? При подсчёте количества способов вырезания прямоугольника учитываются и вертикальные, и горизонтальные расположения.

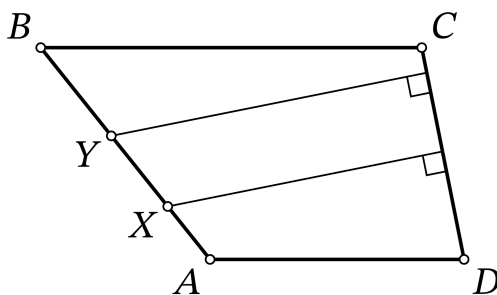
5. Несколько сладкоежек приняли участие в состязании по поеданию конфет. Каждый участник съел целое количество конфет, причём любые два участника съели разное количество конфет. Подводя итоги состязания, жюри упорядочило всех людей по убыванию количества съеденных конфет (например, победитель съел больше всего конфет, а человек, занявший последнее место, съел меньше всего конфет).

Известно, что:

- победитель съел в 14 раз меньше, чем все остальные участники вместе взятые;
- участник, занявший третье место, съел в 20 раз меньше, чем все остальные участники вместе взятые;
- участник, занявший последнее место, съел в 21 раз меньше, чем все остальные участники вместе взятые.

Сколько сладкоежек участвовало в состязании?

6. Дана трапеция $ABCD$. Отрезки AB и CD — её боковые стороны — равны 24 и 10 соответственно. На стороне AB отмечены точки X и Y так, что $AX = 6$, $XY = 8$, $YB = 10$. Известно, что расстояния от точек X и Y до прямой CD равны 23 и 27 соответственно.



1. Найдите площадь треугольника ACD .
2. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

7. На острове живёт 23 рыцаря и 200 лжецов; имена всех жителей различны. Знающий об этом приехавший турист попросил каждого из 223 жителей написать на листке 200 имён лжецов. Каждый рыцарь написал верно 200 имён лжецов, а каждый лжец написал произвольный список из 200 имён, в котором точно нет его собственного имени. Какое наибольшее количество лжецов турист сможет гарантированно определить по этим данным?

8. Неотрицательные числа a , b , c в сумме дают 1. Найдите наибольшее возможное значение величины

$$(a + 3b + 5c) \cdot \left(a + \frac{b}{3} + \frac{c}{5} \right).$$