

Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, муниципальный этап, 2020/21 год

1. Учитель написал на доске двузначное число. Каждый из троих ребят сказал по два утверждения.

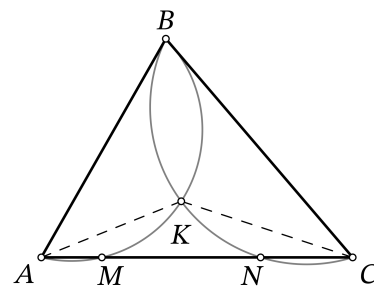
- Андрей: «это число заканчивается на цифру 6» и «это число делится на 7».
- Боря: «это число больше 26» и «это число заканчивается на цифру 8».
- Саша: «это число делится на 13» и «это число меньше 27».

Известно, что каждый из мальчиков один раз сказал правду и один раз ошибся. Какое число могло быть написано на доске? Укажите все возможные варианты.

2. У Веры есть набор различных по массе гирь, каждая из которых весит целое число грамм. Известно, что самая лёгкая гиря набора весит в 71 раз меньше, чем все остальные гири вместе взятые. Также известно, что две самые лёгкие гири набора вместе весят в 34 раза меньше, чем все остальные гири вместе взятые. Какое наименьшее число грамм может весить самая лёгкая гиря?

3. На координатной плоскости отметили все точки (x, y) такие, что x и y — целые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 \leq x \leq 2$ и $0 \leq y \leq 26$. Сколько существует прямых, проходящих ровно через 3 отмеченные точки?

4. На стороне AC треугольника ABC отмечены точки M и N (M лежит на отрезке AN). Известно, что $AB = AN$, $BC = MC$. Описанные окружности треугольников ABM и CBN пересекаются в точках B и K . Сколько градусов составляет угол AKC , если $\angle ABC = 68^\circ$?



5. В шахматном турнире соревнуются друг с другом команда школьников и команда студентов, в каждой из которых по 15 человек. В течение турнира каждый школьник должен сыграть с каждым студентом ровно один раз, причём каждый день каждый человек должен играть не более одного раза. В разные дни могло проводиться разное количество игр.

В некоторый момент турнира организатор заметил, что может составить расписание на следующий день из 15 игр ровно 1 способом, а из 1 игры — N способами (порядок игр в расписании не важен, важно лишь кто с кем играет). Найдите наибольшее возможное значение N .

6. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\angle C = 57^\circ$, $\sin \angle A + \sin \angle B = \sqrt{2}$ и $\cos \angle A + \cos \angle B = 2 - \sqrt{2}$. Сколько градусов составляет угол D ?

7. Натуральные числа a и b таковы, что a^a делится на b^b , однако a не делится на b . Найдите наименьшее возможное значение числа $a + b$, если известно, что число b взаимно просто с 210.

8. Внутри тетраэдра $ABCD$ даны точки X и Y . Расстояния от точки X до граней ABC , ABD , ACD , BCD равны 14, 11, 29, 8 соответственно. А расстояния от точки Y до граней ABC , ABD , ACD , BCD равны 15, 13, 25, 11 соответственно. Найдите радиус вписанной сферы тетраэдра $ABCD$.