

# Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, региональный этап, 2019/20 год

## Первый день

1. Изначально на столе лежали 10 куч конфет, в которых было  $1, 2, \dots, 10$  конфет соответственно. Малыш решил перераспределить конфеты. На каждой нечётной минуте он выбирает одну из куч и делит её на две кучи, в каждой из которых хотя бы по одной конфете. На каждой чётной минуте он выбирает две кучи и объединяет их в одну (таким образом, первым действием он делит кучу на две). Может ли в некоторый момент оказаться, что все кучи на столе содержат одно и то же количество конфет?
2. На доске написаны  $n$  различных целых чисел, любые два из них отличаются хотя бы на 10. Сумма квадратов трёх наибольших из них меньше трёх миллионов. Сумма квадратов трёх наименьших из них также меньше трёх миллионов. При каком наибольшем  $n$  это возможно?
3. Коля и Дима играют в игру на доске  $8 \times 8$ , делая ходы по очереди, начинает Дима. Коля рисует в клетках крестики, а Дима накрывает прямоугольниками  $1 \times 2$  (*доминошками*) пары соседних по стороне клеток доски. За свой ход Коля должен поставить один крестик в любую пустую клетку (т.е. в клетку, в которой ещё не нарисован крестик и которая ещё не покрыта доминошкой). Дима за свой ход должен накрыть доминошкой два соседних клетки (ещё не накрытые другими доминошками), в которых суммарно чётное число крестиков (0 или 2). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?
4. Пусть  $p$  — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число  $y$ , меньшее  $p/2$  и такое, что число  $py + 1$  невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше  $y$ .
5. Четырёхугольник  $ABCD$  описан около окружности  $\omega$ . Докажите, что диаметр окружности  $\omega$  не превосходит длины отрезка, соединяющего середины сторон  $BC$  и  $AD$ .

## Второй день

6. Петя и Миша стартуют по круговой дорожке из одной точки в направлении против часовой стрелки. Оба бегут с постоянными скоростями, скорость Миши на 2% больше скорости Пети. Петя всё время бежит против часовой стрелки, а Миша может менять направление бега в любой момент, непосредственно перед которым он пробежал полкруга или больше в одном направлении. Покажите, что пока Петя бежит первый круг, Миша может трижды, не считая момента старта, поравняться (встретиться или догнать) с ним.

7. Зелёный хамелеон всегда говорит правду, а коричневый хамелеон врёт и после этого немедленно зеленеет. В компании из 2019 хамелеонов (зелёных и коричневых) каждый по очереди ответил на вопрос, сколько среди них сейчас зелёных. Ответами были числа  $1, 2, 3, \dots, 2019$  (в некотором порядке, причём не обязательно в указанном выше). Какое наибольшее число зелёных хамелеонов могло быть изначально?

8. В остроугольном треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BL$ . Окружность, описанная около треугольника  $ABL$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $D$ . Оказалось, что точка  $S$ , симметричная точке  $C$  относительно прямой  $DL$ , лежит на стороне  $AB$  и не совпадает с её концами. Какие значения может принимать  $\angle ABC$ ?

9. Назовём многоугольник *хорошим*, если у него найдётся пара параллельных сторон. Некоторый правильный многоугольник разрезали непараллельными (по внутренним точкам) диагоналями на несколько многоугольников так, что у всех этих многоугольников одно и то же нечётное количество сторон. Может ли оказаться, что среди этих многоугольников есть хотя бы один хороший?

10. Докажите, что для любых положительных  $x_1, x_2, \dots, x_9$  верно неравенство

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_2^2} + \frac{x_2 - x_4}{x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_3^2} + \dots + \frac{x_8 - x_1}{x_8x_1 + 2x_9x_1 + x_9^2} + \frac{x_9 - x_2}{x_9x_2 + 2x_1x_2 + x_1^2} \geq 0.$$