Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, региональный этап, 2019/20 год

Первый день

1. На доске написано n различных целых чисел. Произведение двух наибольших равно 77. Произведение двух наименьших тоже равно 77. При каком наибольшем n это возможно?

2. Множество A состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Множество B также состоит из n различных натуральных чисел, сумма которых равна n^2. Докажите, что найдётся число, которое принадлежит как множеству A, так и множеству B.

3. В прямоугольном треугольнике ABC на гипотенузу AC опущена высота BH. На стороне BC отмечена точка D, на отрезке BH — точка E, а на отрезке CH — точка F так, что $\angle BAD = \angle CAE$ и $\angle AFE = \angle CFD$. Докажите, что $\angle AEF = 90^\circ$.

4. Пусть p — простое число, большее 3. Докажите, что найдётся натуральное число y, меньшее $p/2$ и такое, что число $py + 1$ невозможно представить в виде произведения двух целых чисел, каждое из которых больше y.

5. В таблице $N \times N$ расставлены все натуральные числа от 1 до N^2. Число назовём *большим*, если оно наибольшее в своей строке, и *малым*, если оно наименьшее в своём столбце (таким образом, число может быть и большим, и малым одновременно, а может не быть ни тем, ни другим). Найдите наименьшую возможную разность между суммой всех больших чисел и суммой всех малых чисел.

Второй день

6. На доске написаны функции: $x+1$, x^2+1, x^3+1, x^4+1. Разрешается дописывать на доску новые функции, получаемые из написанных на доске с помощью операций вычитания и умножения. Покажите, как получить ненулевую функцию, которая при положительных значениях аргумента принимает неотрицательные значения, а при отрицательных значениях аргумента — неположительные значения.

7. Можно ли раскрасить все натуральные числа в два цвета так, чтобы никакая сумма двух различных одноцветных чисел не являлась степенью двойки?

8. Известно, что для некоторых x и y суммы $\sin x + \cos y$ и $\sin y + \cos x$ — положительные рациональные числа. Докажите, что найдутся такие натуральные числа m и n, что $m \sin x + n \cos x$ — натуральное число.

9. Три сферы попарно касаются внешним образом в точках A, B и C, а также касаются плоскости α в точках D, E и F. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, меньше, чем радиус окружности, описанной около треугольника DEF.

10. Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида ax^2+bx+c (т. е. степень каждого многочлена не превышает 2). За ход Вася называет Пете число t, а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После n ходов Вася должен определить один из петиных многочленов. При каком наименьшем n у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться?