

# Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, школьный этап, 2018/19 год

1. Есть три брата-акробата. Их средний рост — 1 метр 74 сантиметра. А средний рост двух из этих братьев: самого высокого и самого низкого — 1 метр 75 сантиметров. Какого роста средний брат? Ответ обоснуйте.

1 метр 72 сантиметра

2. Радиус описанной окружности равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) равен основанию  $AC$ . На основании  $AC$  построен квадрат  $AKLC$  так, что отрезок  $KL$  пересекает боковые стороны треугольника. Докажите, что треугольник  $BKL$  равносторонний.

3. Назовём трёхзначное число *интересным*, если хотя бы одна его цифра делится на 3. Какое наибольшее количество подряд идущих интересных чисел может быть? (Приведите пример и докажете, что больше чисел получить нельзя.)

4. Разность корней квадратного уравнения с действительными коэффициентами

$$2018x^2 + ax + b = 0$$

— целое число (при этом сами корни необязательно целые). Докажите, что дискриминант этого уравнения делится на  $2018^2$ .

5. Найдите все такие пары натуральных чисел  $a$  и  $b$ , что

$$\text{НОК}(a, b) = \text{НОД}(a, b) + 19$$

(и докажете, что других нет).

$\text{НОД}(a, b)$  — это наибольший общий делитель, то есть наибольшее натуральное число, делящее и  $a$ , и  $b$ .  $\text{НОК}(a, b)$  — это наименьшее общее кратное, то есть наименьшее натуральное число, кратное и  $a$ , и  $b$ .

(a, b) = (1, 20); (2, 19); (4, 5); (5, 4); (8, 19); (19, 38); (38, 19)

6. В стране 100 городов. Между любыми двумя городами либо нет соединения, либо налажено авиасообщение, либо есть железная дорога (одновременно и авиасообщения, и железной дороги быть не может). Известно, что если два города соединены с третьим железной дорогой, то между ними есть авиалиния, а если два города соединены с третьим авиалиниями, то между ними есть железная дорога. Из-за стихийного бедствия отменили все авиарейсы в стране. Правительство постановило в некоторых городах разместить центры гуманитарной помощи, причём так, чтобы из каждого города можно было добраться в подобный центр. Докажите, что необходимо открыть хотя бы 20 таких центров.