

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

Отборочный этап, 11 класс, 2025 год, вариант 2

1. По шоссе в одном направлении с постоянной скоростью через равные интервалы времени идут без остановок автобусы. Один человек прошёл по шоссе 4 км, и за это время его обогнали 6 автобусов. В другой раз он прошёл 7 км и за это время его обогнали 8 автобусов. В третий раз он прошёл 17 км. Сколько автобусов при этом могло его обогнать? (Все три раза человек шел с одной и той же скоростью.) В ответ напишите сумму всех возможных решений.

43

2. Сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt[3]{|x|} + 10[x] = 10x?$$

$[x]$ — целая часть числа x , т. е. $[x] \in \mathbb{Z}$ и

$$[x] \leq x < [x] + 1.$$

0000

3. Пусть

$$g(x) = \frac{2}{x^2 - 8x + 17}.$$

Найдите все возможные значения параметра a , при которых неравенство

$$a^2 + 6a + \frac{727}{145} \leq g(g^4(x)) \leq 10a^2 + 29a + 2$$

выполняется при всех действительных x . В ответ запишите разность между наибольшим и наименьшим возможными значениями параметра a .

1,2

4. Сколькими способами можно начертить линию

$$x \sin \sqrt{16 - x^2 - y^2} = 0$$

без отрывов и повторов, т. е. не отрывая карандаша и не проводя более одного раза по одной и той же линии.

22

5. Числа от 100 до 999 выписаны без пробелов. С каким остатком полученное 2700-значное число делится на 7?

2

6. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольника, координаты вершин которого удовлетворяют уравнению

$$|y - x| = (y + x + 1)(5 - x - y),$$

а стороны параллельны прямым $y = x$ и $y = -x$? В ответ запишите квадрат значения найденной площади.

432

7. Медиана BD треугольника ABC равна $\sqrt{785}$. Через вершину B проведена прямая, перпендикулярная стороне AB . На этой прямой лежит точка O , $\angle BOC = 90^\circ$. Окружность с центром в точке O , проходящая через точку A , пересекает прямую BO в точках M и N . Найдите площадь треугольника OAC , если $MC = 10\sqrt{17}$, тангенс угла CAB равен $7/9$.

501

8. Укажите наибольшее значение параметра p , при котором уравнение имеет хотя бы одно решение

$$2 \cos \left(2\pi - \frac{\pi x^2}{6} \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} \sqrt{9 - x^2} \right) - 3 = p - 2 \sin \left(-\frac{\pi x^2}{6} \right) \cos \left(\frac{\pi}{3} \sqrt{9 - x^2} \right).$$

—2

9. Дана правильная четырёхугольная пирамида $TABCD$ с основанием $ABCD$, причём $AB = 9/2$. На её высоте TO выбрана точка T_1 так, что $TT_1 = TO/3$. Точки A_1 , B_1 , C_1 и D_1 делят отрезки OA , OB , OC и OD , соответственно, в отношении $1 : 2$, считая от точки O . Найдите площадь сечения пирамиды $T_1A_1B_1C_1D_1$ плоскостью, параллельной медиане AK боковой грани TAB , проходящей через середину ребра TC и точку F отрезка TA такую, что $AF : FT = 1 : 2$, если известно, что расстояние от точки C до этой плоскости сечения равно $4\sqrt{2/13}$. Результат округлите до сотых по правилам округления.

0,43