

## Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

## Отборочный этап, 11 класс, 2024 год

1. Имеется некоторый объём водного раствора кислоты 70%-ой концентрации. Отлили треть объёма этого раствора и тут же долили такой же объём раствора кислоты 2%-ой концентрации (полный объём раствора не изменился). Данную процедуру повторили ещё 6 раз (всего 7 раз, включая первую). Найдите концентрацию кислоты, полученной после проведения всех процедур. Результат округлите до целого числа.

9

2. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\sqrt{7x} + 17\sqrt{y} = z\sqrt{2023},$$

если  $z \leq 10$ ?

99

3. Решите неравенство

$$\left| g\left(2\sqrt{2,5 - g(x)}\right) - 2 \right| \geq 1,$$

где

$$g(x) = \frac{3}{|x - 2| + 1}.$$

В ответ запишите сумму решений этого неравенства. Если решений бесконечно много или они отсутствуют, то в ответ запишите 0.

8

4. Имеются 5 тюленей, 4 котика и 3 моржа. Сколькими способами можно выбрать из них 5 животных так, чтобы среди выбранных присутствовали все три вида, но никакой вид не составлял абсолютного большинства?

06E

5. Какую наименьшую длину может иметь отрезок  $AB$ , если точка  $A$  принадлежит кривой

$$5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 24 = 0,$$

а точка  $B$  — одному из графиков семейства функций

$$y = (k^2 + 2k + 3)|x - 3|,$$

$k \in \mathbb{R}$ ? В ответ запишите сумму квадрата найденной наименьшей длины и значения  $k$ , при котором эта длина достигается.

8'0-

6. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  углы при основании  $AC$  равны  $80^\circ$ , боковая сторона

$$AB = \frac{2 \cos 10^\circ}{1 - \cos 40^\circ}.$$

На сторонах  $AB$  и  $BC$  выбраны точки  $E$  и  $D$  соответственно, причём угол  $CAD$  равен  $50^\circ$ , а угол  $ACE$  равен  $60^\circ$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника  $AED$ .

2

7. Найдите все значения параметра  $p$ , при которых система уравнений имеет единственное решение

$$\begin{cases} y^2 = \frac{1 + \cos x}{2}, \\ px^2 + p - 3 = 2x^2 + y - \sqrt{\frac{1 - \cos 4x}{2}}. \end{cases}$$

В ответе выпишите наименьшее из полученных значений параметра.

4

8. Сечение правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  образовано плоскостью, проходящей через центр основания  $ABCDEF$  и параллельной медиане  $CM$  боковой грани  $SCD$  и апофеме  $SN$  боковой грани  $SAF$ . Найдите отношение объёмов многогранников, на которые плоскость сечения разбивает пирамиду, если плоскость сечения наклонена к плоскости основания пирамиды под углом  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{4}$ . Решение представьте в виде несократимой дроби  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа. В ответ запишите сумму  $m + n$ .

2240