

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

11 класс, 2024 год

1. Буквы в симметричном слове АРБУЗУЗУБРА случайно переставили так, что полученное слово отличается от исходного. С какой вероятностью это слово снова будет симметричным? Ответ запишите в виде несократимой дроби.

6625199
111

2. На параболе $y = x^2$ даны две точки: A с абсциссой -3 и B с абсциссой 5 . Точка C лежит на дуге AB . Найдите максимальную возможную площадь треугольника ABC .

74

3. В треугольник ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 8$, $AC = 7$ вписана окружность с центром в точке O , которая касается сторон AC и BC в точках M и N соответственно. На прямой MN отмечена точка K так, что угол OAK равен 60° . Найдите длину отрезка KN .

$\frac{1}{12^{\wedge}9}$

4. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$2\sqrt{x^2 + 324} - f(x) \geq \frac{x^2 + 324}{f(x) - a} - a$$

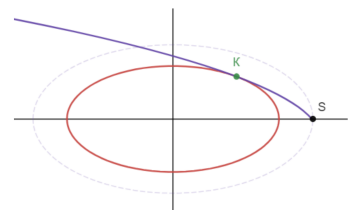
имеет единственное решение, если $f(x) = \sqrt{g^2(x) - 400}$, $g(x) = 19 + 2 \cos 2x + 4 \cos x$.

$3 - = v$

5. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = 2\sqrt{3}$, $AD = 4\sqrt{3}$ и углом A , равным 60° . Высотой пирамиды $SABCD$ является отрезок SO , где O — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, $SO = 1$. Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью, параллельной медиане SE боковой грани SAB и проходящей через середину ребра SC и середину отрезка AO .

$\frac{01}{19}$

6. За время освоения космического пространства на различных орбитах скопилось по данным NASA около 300 тысяч объектов космического мусора. Дальнейшее использование космического пространства в ближайшем будущем может быть существенно осложнено всё возрастающей угрозой столкновения с космическим мусором. Согласно результатам исследований, удаление 3–5 крупных объектов в год с низких околоземных орбит позволяет предотвратить цепную реакцию роста объектов космического мусора в будущем. На данный момент работающей технологией по утилизации космического мусора является увод старых спутников. Это можно сделать с помощью аппаратов-захватчиков, которые буксируют мусор на орбиты для захоронения.



Рассмотрим плоскость орбиты захоронения. Пусть крупный фрагмент мусора движется в этой плоскости по эллиптической орбите с большой полуосью равной 5000 км, малой — 2500 км. (Для удобства вычислений все расчеты будем производить в тысячах километров.) Введем систему координат с началом отсчета в центре рассматриваемого эллипса, с осью абсцисс, направленной вдоль большой полуоси. Тогда уравнение траектории движения обломка запишется следующим образом: $x^2 + 4y^2 = 25$.

На некотором удалении по оси абсцисс находится межпланетная научная станция S . С нее стартует летательный аппарат-захватчик, который движется по параболической траектории: $(y + 1)^2 = -9 \cdot (x - 7)/4$. Он должен совершить манёвр по переходу с одной орбиты на другую и плавно подойти к обломку для изменения его скорости и направления движения.

Определите координаты точки касания указанных траекторий и угол, который образует с положительным направлением оси абсцисс касательная к параболической траектории в начальный момент времени в точке S .

$\left(\frac{8}{6}\right) \text{Эллинг} - \text{л} = \text{л} \text{ или } \left(\frac{8}{6}\right) \text{Эллинг} - = \text{л} \text{ '(Z'G)}$
