

## Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

## 11 класс, 2023 год, вариант 2

1. Последовательность Фибоначчи задана рекуррентно  $a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ . С каким остатком число 3 в степени  $a_{2022}$  делится на 13?

2. Известно, что графики функций  $f(x) = x^p$  и  $g(x) = \ln x$  касаются (имеют общую точку, в которой касательные к обоим графикам совпадают). Найдите константу  $p$  и точку касания.

3. Биссектрисы  $AA_1$  и  $BB_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ , причем  $AO : OA_1 = 2 : 1$ . Биссектриса внешнего угла при вершине  $C$  треугольника  $ABC$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $C_1$ . Найдите угол  $B_1A_1C_1$  и длину отрезка  $A_1C_1$ , если  $AB = 2$ ,  $AC = 4$ .

4. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых равенство  $\log_{\sqrt{a/10}} \left( \frac{a+8x-x^2}{20} \right) \geq 2$  имеет хотя бы одно решение  $x \geq 2$ , и каждое такое решение является также решением уравнения  $|a + 2x - 16| + |a - 2x + 9| = |2a - 7|$ .

5. Найдите площадь сечения правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  плоскостью, проходящей через вершину  $C$  основания  $ABCDEF$  и параллельной медиане  $BM$  боковой грани  $SAB$  и апофеме  $SN$  боковой грани  $SAF$ , если сторона основания пирамиды равна 2, а расстояние от вершины  $S$  до секущей плоскости равно 1.

6. Во всем мире популярна игра в хоккей. Многое в игре зависит от вратаря. Для отработки навыков вратарей и обеспечения тренировочного процесса, который бы не зависел от других игроков, создали шайбомет. Автомат можно настроить так, чтобы он выбрасывал шайбы с заданной временной частотой, скоростью и под определенным углом.

Пусть автомат установлен на льду на расстоянии  $l = 12$  м от ворот. Броски производятся в плоскости, перпендикулярной поверхности льда и линии ворот, с некоторой фиксированной начальной скоростью выброса шайбы  $V_0$  и под различными углами  $\alpha$  к поверхности льда. Примем точку выброса за начало отсчета системы координат. Ось абсцис направим перпендикулярно центральной линии хоккейной площадки в сторону ворот. Ось ординат — вверх, перпендикулярно поверхности льда. В распоряжении вратаря имеется ловушка для шайб, изображенная на рисунке точкой  $M$ . Траектория движения шайбы, находящейся в воздухе и рассматриваемой как материальная точка, в зависимости от времени  $t$  в указанной системе координат описывается уравнениями:

$$\begin{cases} x = V_0 t \cos \alpha, \\ y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$



Определите диапазон возможных значений квадрата начальной скорости выброса шайбы, при каждом из которых шайба попадает в ловушку и максимально возможная высота ловушки в моменты захвата шайбы не превосходит 1 м. Для упрощения вычислений считать, что ускорение свободного падения  $g = 10 \text{ м/с}^2$ .