

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

Отборочный этап, 11 класс, 2023 год

1. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 12 км, одновременно вышел пешеход и выехал автобус. Доехав до пункта В менее чем за один час, автобус, не останавливаясь, повернул обратно и стал двигаться по направлению к пункту А со скоростью, в два раза большей первоначальной. Через 12 мин после своего отправления из пункта В автобус встретился с пешеходом. Определите наибольшее возможное целое значение скорости (в км/ч) пешехода, и для этого значения скорости пешехода определите первоначальную скорость автобуса (в км/ч). В ответ запишите сумму найденных значений скоростей пешехода и автобуса.

21

2. Сколько корней имеет уравнение

$$\sqrt[3]{|x|} + 10[x] = 10x?$$

($[x]$ — целая часть числа x , т. е. $[x] \in \mathbb{Z}$, $[x] \leq x < [x] + 1$).

0002

3. Решите неравенство

$$2\sqrt{x^2} \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{6x^2} + \frac{\pi}{2} \geq \frac{\pi}{3}|x| - \left(\frac{1}{x^2} - 3\right) \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

В ответ запишите сумму всех целых значений x , удовлетворяющих этому неравенству.

2

4. Сколькими способами можно погрузить семь разных изделий (3 по 2 тонны, 4 по 1 тонне) в два фургона грузоподъемностями 6 т и 5 т, если расположение грузов внутри фургона не важно?

47

5. Числа от 100 до 999 выписаны без пробелов. С каким остатком полученное 2700-значное число делится на 7?

2

6. Какое наименьшее расстояние может быть между двумя точками, одна из которых лежит на графике функции $y = x^2$, другая — на кривой, заданной уравнением

$$4x^2 + 4y^2 - 48x - 24y + 163 = 0.$$

В ответ запишите квадрат найденного расстояния.

17/4

7. В треугольнике ABC , площадь которого равна $180\sqrt{3}$, проведены биссектриса AD и высота AH . Окружность радиуса $\frac{105\sqrt{3}}{4}$ с центром, лежащим на прямой BC , проходит через точки A и D . Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $BH^2 - HC^2 = 768$.

87

8. Найдите наименьшее целое значение параметра a , при котором уравнение

$$x^2 + 2x + a^2 + 2a - 5 = 2 \left(f \left(\frac{1}{x} \right) - ax \right)$$

имеет единственное решение. Функция $f(t)$ задается соотношением

$$f(t) = \frac{\sqrt[3]{(27 \cdot t^2 + 4)(t + 2) + 32t}}{t - \sqrt{t^2}}$$

при всех возможных значениях t .

88

9. В правильной четырехугольной пирамиде $TABCD$ через центр основания $ABCD$ проведено сечение плоскостью параллельно медиане AM боковой грани TAB и апофеме TK боковой грани TCD . Найдите объем пирамиды с вершиной в точке T , основанием которой является указанное выше сечение, если высота пирамиды $TABCD$ равна 12, а расстояние между прямой AM и плоскостью сечения равно $\sqrt{3}$.

89