

## Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

## 10 класс, 2023 год, вариант 2

1. Игральный кубик подбрасывают дважды, при этом вычисляют и записывают сумму выпавших очков. Такую процедуру повторяют три раза (всего совершают шесть подбрасываний). Найдите вероятность того, что только одна из трех записанных сумм кратна трем.

2. Найдите наименьшее натуральное число  $m$ , при котором выражение  $148^n + m \cdot 141^n$  делится на 2023 при любом нечетном натуральном  $n$ .

3. В треугольнике  $ABC$  проведены биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $L$  — точка пересечения отрезков  $B_1C_1$  и  $AA_1$ ,  $K$  — точка пересечения отрезков  $B_1A_1$  и  $CC_1$ ,  $M$  — точка пересечения  $BK$  и  $AA_1$ ,  $N$  — точка пересечения  $BL$  и  $CC_1$ . Найдите отношение  $MS : SN$ , если  $S$  — точка пересечения биссектрисы  $BB_1$  с отрезком  $MN$ , и  $AB : BC : AC = 2 : 3 : 4$ .

4. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

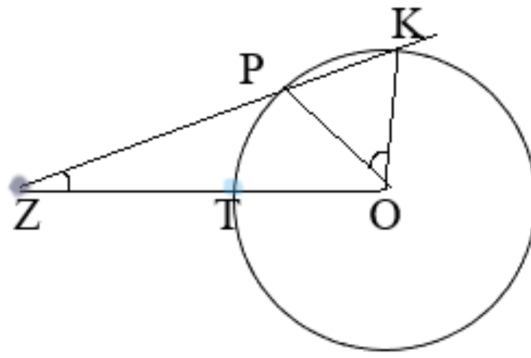
$$|2 + |x| - a| - |a - |x + 1| - |x - 1|| = 2 + |x| + |x + 1| + |x - 1| - 2a$$

имеет ровно два целых решения. Укажите эти решения при каждом из найденных  $a$ .

5. Сечение правильной шестиугольной пирамиды  $SABCDEF$  образовано плоскостью, проходящей через вершину  $C$  основания  $ABCDEF$  и параллельной медиане  $BM$  боковой грани  $SAB$  и апофеме  $SN$  боковой грани  $SAF$ , сторона основания пирамиды равна 2, а расстояние от вершины  $S$  до секущей плоскости равно 1. Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания.

6. Астрономы обнаружили за планетой Сатурн новое небесное тело, движущееся по круговой орбите, для изучения которого был направлен научно-исследовательский зонд — автономный робот, оснащенный ракетными двигателями, собственной энергетической установкой, системами радиосвязи и навигации, научными приборами, фото- и видеотехникой. И все это управляется бортовыми компьютерами. Для изучения найденного объекта было принято решение произвести фотосъемку в двух точках его орбиты. После съемок в первой точке, потребовалось скорректировать скорость движения зонда, чтобы иметь возможность сделать еще один фотоснимок небесного тела в другой точке его орбиты.

Рассмотрим упрощенную модель возникшей ситуации. Считаем изучаемый объект (небесное тело) и исследовательский зонд материальными точками, небесное тело движется по круговой орбите с центром в точке  $O$  и радиусом  $R = 1,2 \cdot 10^6$  км с постоянной угловой скоростью  $\omega = 0,25 \cdot 10^{-5}$  рад/с. Проекцию зонда на плоскость орбиты назовем подзондовой точкой. Скорость движения подзондовой точки постоянна и равна  $V_1$ , а ее траекторию в плоскости орбиты условно считаем прямой, пересекающей окружность в точках  $P$  и  $K$ . Согласно заложенной программе, съемка небесного тела зондом осуществляется в моменты их наибольшего сближения, которые соответствуют моментам пересечения траектории подзондовой точки с орбитой тела (точки  $P$  и  $K$ ). Когда небесное тело (точка  $T$ ) оказывается строго на прямой между точкой  $O$  и подзондовой точкой (точка  $Z$ ), запускается таймер ( $t_0 = 0$ ). В точке  $P$  небесное тело и подзондовая точка находятся в одно и тоже время, и осуществляется съемка, после чего скорость зонда меняется так, чтобы над точкой  $K$  вновь оказаться одновременно с телом для его повторного фотографирования. Скорость подзондовой точки на участке  $PK$  постоянна.



Определите расстояние между подзондовой точкой и изучаемым телом в начальный момент времени  $t_0$ , а также скорость подзондовой точки  $V_2$  на участке  $PK$ , если центральный угол  $POK$  равен углу  $PZO$  и в полтора раза меньше центрального угла  $POT$ . В расчетах используйте приближенное значение числа  $\pi$  — округлите его до целого значения.