

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

9 класс, 2021 год, вариант 2

1. Решите неравенство:

$$3|3x - 2| - |x - 1| - 2|x| \leq 2\sqrt{9x^2 - 12x + 4} + \sqrt{x^2 - 2x + 1} - 1.$$

2. Точки E и K — соответственно середины сторон CD и AD квадрата $ABCD$. Прямая BE пересекается с прямой CK в точке O . Докажите, что вокруг четырехугольника $ABOK$ можно описать окружность. Найти радиус этой окружности, если сторона квадрата равна 1.

3. Ученики девятого, десятого и одиннадцатого классов надували шарики к празднику. Каждый девятиклассник работал 6 часов, десятиклассник — 12 часов, одиннадцатиклассник — 18 часов. При этом каждый девятиклассник надул 45 шариков, десятиклассник — 100 шариков, одиннадцатиклассник — 120 шариков. Все ученики вместе отработали 108 часов. Сколько шариков было приготовлено к празднику, если их общее количество оказалось максимально возможным?

4. Числа x и y таковы, что

$$\begin{cases} x + y = a + 2, \\ xy = a^2 - a + 2. \end{cases}$$

При каком значении a сумма $x^2 + y^2$ принимает наибольшее значение?

5. От прямой линии, проходящей через точки пересечения медиан и биссектрис тупоугольного треугольника, двумя его сторонами отсекается отрезок длиной на 1 см меньше, чем одна из длин сторон данного треугольника. Найдите наименьшую из возможных длин сторон этого треугольника, если их длины выражаются натуральными числами (в см) и образуют арифметическую прогрессию.

6. Игра в кости. При броске пяти попарно различных разноцветных кубиков выпадает сумма в 21 очко. Сколько возможно различных вариантов с такой суммой?