

## Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

## 11 класс, 2020 год, вариант 2

1. Цех выпускает трансформаторы видов  $A$  и  $B$ . На один трансформатор вида  $A$  расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, а на трансформатор вида  $B$  — 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации трансформатора вида  $A$  прибыль составляет 12 тысяч рублей, вида  $B$  — 10 тысяч рублей. Сменный фонд железа составляет 481 кг, проволоки — 301 кг. Сколько трансформаторов видов  $A$  и  $B$  нужно выпускать за смену, чтобы получить наибольшую прибыль от продажи изделий, если расход ресурсов не должен превышать выделенных на смену фондов? Чему будет равна при этом наибольшая прибыль?

2. Решите неравенство

$$(5 - \cos 2(x + y) + 4 \sin(x + y)) \log_2 (3^x + 3^{-x}) \leq 2.$$

3. Петя задумал пять чисел. На доске он написал их попарные суммы: 7, 9, 12, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 29. Какие числа задумал Петя?

4. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Известно, что центры вписанной в треугольник  $ABD$  и описанной около треугольника  $ABC$  совпадают. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $CD = 4$ . Ответ не должен включать обозначения тригонометрических функций и обратных к ним.

5. Найдите все значения параметра  $b$ , при котором для любого значения параметра  $a \in [-1; 2]$  неравенство  $\operatorname{tg}^2 x + 4(a + b) \operatorname{tg} x + a^2 + b^2 - 18 << 0$  выполняется при каждом  $x \in [-\pi/4; \pi/4]$ .

6. Основанием пирамиды  $TABCD$  является ромб  $ABCD$ . Высота пирамиды  $TK$  равна 5, точка  $K$  лежит на прямой, содержащей диагональ основания  $AC$ , причем  $KC + KA = AC$ . Боковое ребро  $TC$  равно  $6\sqrt{5}$ , а боковые грани наклонены к плоскости основания под углами  $30^\circ$  и  $60^\circ$ . Найдите длину стороны основания и угол между стороной основания  $AB$  и боковой гранью  $TBC$ .