

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

10 класс, 2020 год, вариант 2

1. Для химических опытов взяли две одинаковые пробирки, в которых налито жидкое вещество по 200 мл в каждой. Из первой пробирки вылили $1/4$ содержимого и добавили такое же количество воды, затем процедуру повторили еще 3 раза, каждый раз выливая четверть содержимого пробирки и доливая такое же количество воды. Аналогичную процедуру провели дважды для второй пробирки, выливая каждый раз некоторое количество содержимого пробирки и доливая такое же количество воды. В итоге концентрация полученных смесей в первой и второй пробирках стало относиться друг к другу как $9/16$. Определите, какое количество смеси отливали каждый раз из второй пробирки.

2. Найдите остаток от деления на 11 числа A :

$$A = \frac{2^1 - 2^2 + 2^3 - \dots + 2^9 - 2^{10}}{-2^{-1} + 2^{-2} - 2^{-3} + \dots - 2^{-9} + 2^{-10}}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{(|x+1| - |x-1|)(x^3 - 7x^2 + 36)}{x^8 + 2x^6 - 6x^4 + 2x^2 + 1} \geq 0.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{x + \sqrt{x} - \frac{71}{16}} - \sqrt{x + \sqrt{x} - \frac{87}{16}} = \frac{1}{2}.$$

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C длина биссектрисы угла A равна 4, угол $A = 60^\circ$. На серединном перпендикуляре к катету CB в точке Q лежит центр окружности, которая касается прямых AC и AB в точках K и M соответственно. Найдите площадь треугольника OQM , где точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$(x^2 - a)^2 + 2(x^2 - a) + (x - a) + 2 = 0$$

имеет ровно одно решение? Укажите решение при найденных значениях параметра a .