

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

8 класс, 2019 год, вариант 4

1. При каких значениях параметра k на прямой $y = kx - 3$ есть хотя бы одна точка с равными положительными координатами?

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y^2 - 6y + 5}{x + 4} = x, \\ y = x^2 + 4x + 1. \end{cases}$$

3. В треугольнике MPK $MK = 4$, $\angle PMK = 60^\circ$, $\angle PKM = 45^\circ$. MM_1 и KK_1 — высоты треугольника MPK . Из вершин M и K к прямой M_1K_1 проведены перпендикуляры ME и KH . Найдите длины отрезков EK_1 и M_1H .

4. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение, если

$$f(x) = \left| \frac{x^3 - x^2 - 16x + 16}{(x - 2)(x + 3) + 2(x + 1)} \right|;$$

$$p(x) = \sqrt{x^2 + 10x + 25} + a.$$

5. Про четыре натуральных числа a, b, c, d известно, что они являются квадратами различных натуральных чисел. Могут ли числа $a^2 + 2cd + b^2$ и $c^2 + 2ab + d^2$ также являться квадратами натуральных чисел?

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точки K, L, M делят сторону BC , а точки N, E, F сторону AD на четыре равные части соответственно. Найти площади четырехугольников $ABKN$ и $LMFE$, если площади четырехугольников $KLEN$ и $FMCD$ равны 12 и 24 соответственно.