

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

8 класс, 2019 год, вариант 2

1. При каких значениях a системе уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y = 15a, \\ \frac{1}{a}x + y = 9 \end{cases}$$

удовлетворяет пара равных чисел? Для каждого такого a найдите решение системы.

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{y - x + 1}{x^2 - 3x} = 1, \\ y^2 + 5 + 2xy = 6y + 6x - x^2. \end{cases}$$

3. Произвольная точка M , лежащая внутри правильного шестиугольника $ABCDEF$, площадь которого равна 36, соединена с его вершинами. Площади двух из шести образовавшихся треугольников AMB и CMD равны 3 и 9 соответственно. Найти площади оставшихся четырех треугольников.

4. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $f(x) = p(x)$ имеет одно решение, если

$$f(x) = \left| \frac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{(x-1)(x-3) + 3x - 5} \right|, \quad p(x) = \sqrt{x^2} + a.$$

5. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка K . Через вершину C и середину M отрезка AK проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке N так, что $AM^2 = CM \cdot MN$. Найдите $\angle BKN$, если $\angle ABC = 47^\circ$, $\angle BCA = 64^\circ$.

6. Ученик записал на доске целое число. Затем он в уме умножил его на $5/4$, прибавил к результату $5/4$ и записал ответ на доске. Потом он повторил эти два действия со вторым числом и записал на доске результат. Те же операции он выполнил с третьим, четвертым и пятым числами. Могли ли все шесть чисел получиться целыми? Ответ обоснуйте.