

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

11 класс, 2019 год, вариант 1

1. Студент написал программу перекрашивания пикселя в один из 128 различных цветов. Эти цвета он занумеровал натуральными числами от 1 до 128, причем основные цвета получили следующие номера: белый цвет — номер 1, красный — 5, оранжевый — 13, желтый — 19, зеленый — 23, голубой — 53, синий — 55, фиолетовый — 83, черный — 128. Если исходный цвет пикселя имеет номер $n \leq 17$, то программа студента перекрашивает его в цвет с номером $3n - 2$, а если исходный цвет пикселя имеет номер $n \geq 18$, то пиксель перекрашивается в цвет с номером $|129 - 2n|$. Изначально пиксель имел красный цвет. К нему студент последовательно применил свою программу 2019 раз. В какой цвет в результате окрасился пиксель?

2. Решите неравенство $\sqrt{3} \operatorname{tg} x - \sqrt[4]{\sin y} - \sqrt{\frac{3}{\cos^2 x} + \sqrt{\sin y}} - 6 \geq \sqrt{3}$.

3. Найдите все пары натуральных чисел a и b , для которых из четырех утверждений

1. $a^2 + 4a + 3$ делится на b ;
2. $a^2 + ab - 6b^2 - 2a - 16b - 8 = 0$;
3. $a + 2b + 1$ делится на 4;
4. $a + 6b + 1$ — простое число

три истинны, а одно ложно.

4. В треугольнике ABC с углом A , равным 60° , проведена биссектриса AD . Радиус описанной около треугольника ADC окружности с центром в точке O равен $2\sqrt{3}/3$. Найдите длину отрезка BM , где M — точка пересечения отрезков AD и BO , если $AB = 1$.

5. Для каждого значения параметра a решите уравнение

$$\log_2 \frac{3\sqrt{3} + (\sin x + 4) \cos a}{3 \sin a \cos x} = |3 \sin a \cos x| \left| (\sin x + 4) \cos a + 3\sqrt{3} \right|.$$

6. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC , все стороны которого равны 3, а высота пирамиды совпадает с боковым ребром TA . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через центр сферы, описанной около пирамиды, образующей с плоскостью основания угол 60° , пересекающей ребро AB в точке M , так что $MB = 2AM$, и пересекающей ребро BC . Известно, что расстояние от точки A до плоскости сечения равно 0,25.