

Олимпиада «Шаг в будущее» по математике

9 класс, 2017 год

1. Железнодорожная компания получила заказ на перевозку определённого количества груза. В компании подсчитали, что если для перевозки выделить вагоны вместимостью 62 тонны, то один вагон останется недогруженным, а если выделить вагоны вместимостью 53 тонны, то понадобится на один вагон больше, чем если бы вагоны были по 62 тонны, но и при этом последний вагон опять будет недогружен. А вот если взять вагоны вместимостью 45 тонн, то все задействованные вагоны будут загружены полностью, но придётся увеличить число вагонов ещё на два. Определите массу груза.
2. Точка M лежит на описанной около правильного треугольника ABC окружности и не совпадает с его вершинами. Докажите, что сумма расстояний от точки M до прилегающих вершин треугольника равна расстоянию от точки M до третьей его вершины: $AM + CM = BM$.
3. Найдите наименьшую длину отрезка AB , если точка A принадлежит множеству, задаваемому уравнением $y^2 - 3x^2 - 2xy - 9 - 12x = 0$, а точка B — множеству, задаваемому уравнением $x^2 - 8y + 23 + 6x + y^2 = 0$.
4. При каких a неравенство $x^2 + |x + a| < 2$ имеет хотя бы одно положительное решение?
5. *Как устроить полустанок? (старинная задача)* В стороне от прямолинейного участка железнодорожного пути, в 20 км от него, лежит селение В. Где надо устроить полустанок С, чтобы суммарно проезд от А до В по железной дороге АС и по шоссе СВ отнимал возможно меньше времени? Скорость движения по железной дороге 0,8, а по шоссе 0,2 км в минуту.
6. Сказочное государство расположено на трёх островах: А, В и С. Всего в государстве проживает 100 человек, причём каждый из них живёт на одном из этих островов. Все жители государства — либо рыцари, которые всегда говорят только правду, либо лжецы, которые всегда лгут. На вопрос «Вы проживаете на острове А?» ответили «да» 55 жителей государства; на вопрос «Вы проживаете на острове В?» ответили «да» 38 жителей государства; а на вопрос «Вы проживаете на острове С?» ответили «да» 49 жителей государства. На следующий день на острове А прошёл «очищающий» дождь, после чего все лжецы острова А стали говорить правду (рыцари остались рыцарями, на других островах очищающий дождь не проходил). После этого всем жителям государства был задан вопрос «Вы проживаете на острове В?», на который «да» ответили 27 жителей государства. Если бы «очищающий дождь» прошёл не на острове А, а на острове С, то на вопрос «Вы проживаете на острове В?» ответили бы «да» 29 человек. Сколько лжецов проживают на острове В?