Олимпиада САММАТ

8 класс, 2024 год

1. На доске записаны два приведенных квадратных уравнения с положительными дискриминантами. Для каждого уравнения ученик вычислил произведение корней и сумму квадратов его корней, записал эти четыре числа на доску в порядке возрастания и стер исходные уравнения. Какие уравнения были записаны изначально, если на доске остались числа 2, 3, 5 и 10? Укажите все возможные варианты и объясните, почему нет других вариантов.

$\boxed{x^2 \pm 3x + 2 = 0,\ x^2 \pm 4x + 3 = 0}$

2. Известно, что если скорость товарного поезда была бы 21,75 км/час, то на заданное расстояние между двумя станциями он затратил бы на 7 часов больше, а при скорости $31\frac{1}{2}$ км/час на это расстояние он затратит на 1 час 40 минут меньше, чем он затрачивает при настоящей скорости движения. Найдите настоящую скорость поезда и расстояние между станциями.

$\boxed{v = 29 \text{ км/час},\ S = 609 \text{ км}}$

3. В шахматном турнире участвовали два ученика VII класса и некоторое число учеников VIII класса. По правилам шахматного турнира каждый из участников турнира играет с каждым по одной партии. Если один из играющих выигрывает партию, то он получает одно очко, а его противник получает ноль очков. В случае ничьей играющие получают по 1/2 очка. Два семиклассника набрали вместе 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? Найдите все решения.

$\boxed{7 \text{ или } 14}$

4. В треугольнике ABC высоты, опущенные на стороны AB и BC, не меньше этих сторон соответственно. Найдите углы треугольника.

$\boxed{45^\circ,\ 45^\circ,\ 90^\circ \text{ или } \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}}$

5. Определите, при каких r и s число

$$q = \frac{6^{r+s} \cdot 12^{r-s}}{8^r \cdot 9^{r+2s}}$$

является целым и $q < 10^6$.

$\boxed{s = \{0; -1; -2\},\ k \in (-\infty; +\infty)}$

6. Задана система координат XOY с целочисленными значениями координат. В этой системе координат задана окружность, радиус которой равен 2. Пусть n — количество точек (с целочисленными координатами), лежащих внутри или на окружности. На какую наименьшую величину необходимо увеличить радиус, чтобы внутри или на окружности было $2n - 5$ точек сетки?

$\boxed{\sqrt{5} - 2}$

7. Пусть a, b и c — положительные целые числа, такие что

$$\begin{cases} ab + bc + ca + 2(a + b + c) = 405, \\ abc - a - b - c = 2. \end{cases}$$

Найдите $a + b + c$.

$\boxed{102}$

8. Вычислите

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{8}} \right)^6.$$

$\boxed{8}$

9. Найдите натуральное число $n > 1$, если известно, что числа 502, 661 и 873 при делении на n дают одинаковые остатки.

$\boxed{53}$

10. В шестиугольнике $ABCDEF$ все внутренние углы равны. Найдите BC, если $AB = 9$, $DE = 3$, $EF = 7$.

$\boxed{BC = 1}$