Олимпиада САММАТ

11 класс, 2024 год

1. Пусть z, u, v — положительные числа. При каких ограничениях на z, u, v существует конечное число положительных целых чисел (x, y), удовлетворяющих неравенству

$$vu^y < z^x?$$

$\boxed{u > 1,\ 0 < v < 1,\ 0 < z < 1}$

2. Найдите точки плоскости, обе координаты которых являются натуральными числами, меньшими двадцати, и через которые проходит график функции

$$y = 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{12}\right).$$

Укажите все возможные варианты и объясните, почему нет других вариантов.

$\boxed{(2;1),\ (3;2),\ (4;3),\ (6;4),\ (8;3),\ (9;2),\ (10;1),\ (14;1),\ (15;2),\ (16;3),\ (18;4)}$

3. Найдите решения неравенства

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} > \sqrt{1 + (\operatorname{tg} x - 1)^2},$$

принадлежащие интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$\boxed{x \in \left(0; \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)}$

4. Функция $f(n)$ определена для целых положительных чисел, удовлетворяют условию $f(1) = 1$ и двум соотношениям $f(3n) = 3f(n)$, $f(3n+1) = 9f(n)$. Найдите числа n, удовлетворяющих равенству $f(n) = 81$.

$\boxed{13,\ 36,\ 28,\ 30,\ 81}$

5. В $\triangle ABC$ $\cos A = \frac{1}{8}$, биссектриса $AL = \frac{10}{3}$, $BC = 6$. Найдите длины сторон AB и AC.

$\boxed{\frac{\sqrt{181}}{3} \text{ или } (4, 5) \text{ и } (5, 4)}$

6. Две смежные вершины квадрата лежат на параболе

$$y = x^2 - 4x + 5,$$

а две другие — на параболе

$$y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a.$$

Найдите наименьшую площадь этого квадрата при всевозможных значениях параметра a.

$\boxed{S_{\min} = \frac{9}{5} \text{ при } a = \frac{4}{5}}$

7. Наудачу взятое целое положительное число N возведено в куб. Найдите вероятность того, что полученное число оканчивается на 44. Выпишите все двузначные числа, удовлетворяющие условию задачи.

$\boxed{0{,}02}$

8. Величина z является корнем уравнения $x^5 + x^4 = 1$. Вычислите величину

$$S = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + z^{2n}\right) = (1+z)\left(1+z^2\right)\left(1+z^4\right)\left(1+z^8\right)\left(1+z^{16}\right) \cdot \ldots$$

$\boxed{\frac{1}{1-z} = \frac{z^5+z^4}{1-z} \text{ и ещё ряд эквивалентных выражений}}$

9. В куб с ребром $a = 60$ вписаны три сферы одинакового радиуса r так, что сферы попарно касаются друг друга, каждой грани куба касается какая-то сфера и каждая сфера касается как минимум двух граней куба. Найдите возможные значения радиуса r, если известно, что r — натуральное число.

$\boxed{r = 17}$

10. Решите уравнение

$$\sqrt{\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-1} - \sqrt{x}} - \sqrt[4]{2x-1} - \sqrt[4]{3x-1} + \sqrt[4]{x} = 0.$$

$\boxed{x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 1}$