

Олимпиада САММАТ

9 класс, 2021 год, вариант 2

1. В некотором выпуклом 2021-угольнике провели все диагонали. Оказалось, что если какие-то две диагонали пересекаются в некоторой точке, отличной от вершин многоугольника, то никакая другая диагональ не проходит через эту точку. Найти число точек пересечения диагоналей, отличных от вершин многоугольника.

2. Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2021^2} < 1.$$

3. На какое максимальное число можно сократить дробь $\frac{20202021}{20212020}$?

4. Найти все целые решения неравенства

$$\sqrt{\frac{16x - 39 - x^2}{18}} \leq \frac{16x - 36 - x^2}{18}.$$

5. Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни. Имеет ли квадратный трехчлен $a^5x^2 + b^5x + c^5$ действительные корни? Ответ объясните.

6. В четырехугольнике $ABCD$ серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются на стороне AD и $\angle BAD = \angle ADC$. Может ли одна диагональ четырехугольника быть больше другой? Ответ объясните.

7. Найдите пары натуральных чисел m и n , для которых выполняется равенство:

$$\text{НОК}(m, n) - 2 \cdot \text{НОД}(m, n) = \frac{5mn}{7}.$$

8. Решите уравнение: $\left(\frac{3}{25}x\right)^3 = b$, где b — среднее арифметическое чисел

$$m = \frac{276^2 + 276 \cdot 253 + 253^2}{529}, \quad n = \frac{276^2 - 276 \cdot 253 + 253^2}{23}.$$

9. Из всех решений уравнения $y^2x - y^2 + 4xy + 6x - 2y = 3$ найдите те решения, для которых x принимает наименьшее значение.

10. Для любой пары чисел определена некоторая операция «*», удовлетворяющая следующим свойствам: $a * (b * c) = (a * b) \cdot c$ и $a * a = 1$, где операция « \cdot » — операция умножения. Найдите корень x уравнения: $x * 2 = 2021$.