

Олимпиада САММАТ

8 класс, 2021 год, вариант 1

1. Найдите четырехзначное число \overline{abca} (в десятичной записи), равное $(5c + 1)^2$.
2. Сумма числа сторон выпуклого многоугольника и числа его диагоналей равна 21. Определите число сторон многоугольника.
3. Записать в виде степени число $26 \cdot 2^{2020} + 3 \cdot 2^{2021}$.
4. Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2021} < \frac{1}{2}.$$

5. Дан пример на сложение двух трехзначных чисел:

$$+ \begin{array}{r} a \ 4 \ c \\ d \ 5 \ f \\ \hline g \ h \ 0 \ 2 \end{array}$$

Каждой букве соответствует одна единственная цифра. Разным буквам соответствуют разные цифры. Никакая цифра в примере не повторяется. Какой букве какая цифра соответствует? Приведите хотя бы один конкретный пример.

6. Дедушка с внуком одновременно пошли вместе кататься на лыжах. Бабушка знает, что по ровному месту оба едут со скоростью 7 км/час, под гору — дедушка 8 км/час, внук — 20 км/час, в гору — дедушка 6 км/час, внук — 4 км/час. Оба проехали по одному и тому же маршруту. Может ли бабушка определить, что больше — протяженность спусков или подъемов на их пути, если первым вернулся а) внук; б) дед?
7. Пусть BK — биссектриса в треугольнике $\triangle ABC$, точка D — лежит на стороне BC так, что $\angle DAC = \angle B + \angle C$. Доказать, что DK — биссектриса угла $\angle ADC$.
8. Имеются чашечные весы и гирька массой 1 грамм. Как, воспользовавшись весами 11 раз, взвесить 2021 грамм сахара-песка, если после каждого взвешивания новая порция сахара отсыпается в отдельную ёмкость? Приведите последовательность взвешиваний.
9. На некоторой планете при изучении геометрии на плоскости расстояние между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в декартовой ортогональной системе координат определяют по формуле: $\rho(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Построить в этой геометрии окружность с центром в точке $(2, 1)$ и радиусом $R = 3$ и найти длину этой окружности.
10. Какое наименьшее неотрицательное число можно получить путем расстановки знаков «+» и «-» между числами $1, 2, 3, \dots, 2020, 2021$?