

## Олимпиада «Росатом» по математике

## 11 класс, 2026 год, комплект 2

1. Елку на новогоднем вечере украсили 99 лампочками по числу приглашенных на праздник гостей. У каждой лампочки имеется отдельный выключатель с двумя положениями (вкл/выкл) и номером от 1 до 99. Такие же номера нарисованы на костюмах каждого из гостей. Дед Мороз предложил всем математическую игру: все гости, по очереди, начиная с первого, подходят к выключателям с номерами кратными их собственному номеру и меняют их положение на противоположное. Так, гость с номером 1 меняет положение всех выключателей, с номером 2 — только четных и т. д. В начале игры все лампочки были включены. Сколько лампочек оказались включенными после окончания игры?

06

2. Найти все пары чисел  $(x; y)$ , для которых

$$\begin{aligned} \sqrt{\cos x + 1} + \sqrt{\cos 2x + 2} + \sqrt{\cos y + 3} &= \\ &= \sqrt{\cos y + 1} + \sqrt{\cos x + 2} + \sqrt{\cos 2x + 3} = \\ &= \sqrt{\cos 2x + 1} + \sqrt{\cos y + 2} + \sqrt{\cos x + 3}. \end{aligned}$$

$$\mathbb{R} \ni u, \mathbb{Z} \ni y, \left( u \sqrt{z} + \frac{x}{\sqrt{yz}} \mp \frac{x}{\sqrt{yz}} \right) = (h : x)$$

3. На собеседовании группе из 8 претендентов предложили тест, содержащий  $m$  вопросов. Сложность вопросов теста определялась условием того, что любая группа из 4 претендентов, работая сообща, могла правильно ответить на все вопросы теста, при этом меньшее количество участников собеседования, объединившись в группу, обязательно допускали хотя бы одну ошибку. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение  $m$ .

99

4. Известно, что в любой тройке  $(x, y, z)$  различных чисел, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} x + y + z = \frac{1}{a}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = a, \end{cases}$$

есть число, равное  $a \neq \pm 1$ . Найти наименьшее возможное значение выражения  $x^2 + y^2 + z^2$ . При каком  $a$  оно достигается?

$$\frac{3a}{1} \mp = v \text{ или } \sqrt{z}$$

5. Точки  $M$  и  $N$  — середины скрещивающихся ребер  $AD$  и  $BC$  треугольной пирамиды  $DABC$  с вершиной  $D$ . Точка  $Q$  на ребре  $AC$  делит его в отношении  $AQ : AC = 1 : 3$ . Через точки  $M$ ,  $N$  и  $Q$  проведено сечение пирамиды плоскостью, делящей пирамиду на две части. Найти отношение их объемов.

1:1