Олимпиада «Росатом» по математике

11 класс, 2025 год, комплект 2

1. Для рентабельности работы таксопарк должен выпускать на линию не менее 12 машин ежедневно. Городские власти, борясь за экологию, требуют, чтобы каждое городское такси работало не более 6 дней в неделю. Какое минимальное число автомобилей должно быть в таксопарке, чтобы он был рентабельным и соблюдал экологию? Дни, когда автомобили не выходят на линию, определяет руководство таксопарка.

14

2. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 3x}=\frac{1}{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}$$

при условии, что $\sin x > 0$.

$x_1=\frac{2\pi}{5}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ x_2=\frac{4\pi}{5}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$

3. Для каждого натурального n обозначим через $a(n)$ количество целых чисел $m\in[1;n]$ взаимно простых с n. Найти простое число p, для которого

$$a\big(p^2\big)+a\big(p^3\big)+a\big(p^4\big)+\ldots+a\big(p^{2025}\big)=3^{2025}-3.$$

3

4. Найти все пары чисел $(x;y)$, удовлетворяющие неравенству

$$4^x\big(1+\lg^4 y\big)+\lg^2 y\big(1+16^x\big)\geqslant\big(1+16^x\big)\big(1+\lg^4 y\big).$$

1) $x=0,\ y=10$; 2) $x=0,\ y=0{,}1$

5. Решить уравнение

$$\Big(x^2+\sqrt{x^4+1}\Big)\Big(4-5x+\sqrt{17-40x+25x^2}\Big)=1.$$

$x_1=1,\ x_2=4$

6. На ребрах AB, CD, DB треугольной пирамиды $ABCD$ расположены точки M, N, P соответственно, причем $AM:MB=1$, $CN:ND=2$, $DP:PB=3$. Через точки M, N, P проведена плоскость, пересекающая прямую AC в точке R. Найти отношение длин отрезков $CR:RA$.

6